全國公私立高級中學 107 學年度指定科目第六次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：108 年 4 月 10~11 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	2	3	1	145	1345	235	2	5	0	3	4	0	−
15	16												
1	2												

第壹部分：選擇題

一、單選題

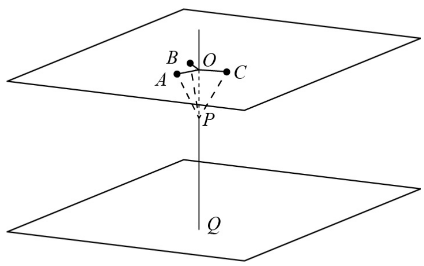
1. 橢圓中心點 $(0,0)$，焦點是 $(0,2)$，爲直橢圓且 $c=2$，又 $a^2=b^2+c^2$，所以可得 $k=16+4=20$
   故選(5)
2. $L:3x+4y=108 \Rightarrow y=\dfrac{108-3x}{4}=27-\dfrac{3}{4}x$，
   $x=4,8,12,\cdots,32$，共 8 個
   故選(2)
3. $\because 0<0.5^5<0.5^0=1 \Rightarrow 0<a<1$，$5^0<5^{0.5} \Rightarrow 1<b$，
   $\log_{0.5}5<\log_{0.5}1=0 \Rightarrow c<0$
   因此 $c<0<a<1<b$
   故選(3)
4. 將 $1-i$ 爲 $x^2+ax+(3-i)=0$ 的一根，
   代入得 $(1-i)^2+a(1-i)+(3-i)=0$，求出 $a=-3$
   故選(1)

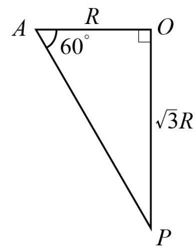
二、多選題

5. (1) 正確
   (2) 可能爲情況一(一個點和一條線)或情況二(兩條平行直線)
   (3) 直線和線外一個點可決定一平面
   (4) 正確
   (5) 正確
6. (1) $P((X=1)\cap(Y=5))=C_1^6\cdot(\dfrac{3}{6})\cdot(\dfrac{2}{6})^5=\dfrac{1}{81}$
   (2) $(\dfrac{2}{6})^2\cdot(\dfrac{4}{6})^4=\dfrac{16}{729}$
   (3) $(\dfrac{3}{6})^2\cdot(\dfrac{4}{6})^4=\dfrac{4}{81}$
   (4) $E(Y)=np=6\cdot\dfrac{2}{6}=2$
   (5) $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{6\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{3}{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
7. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2n+3n+\ldots+n^2}{1+4+9+\ldots+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\dfrac{(1+n)\cdot n}{2}}{\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$
   $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}n^3+\dfrac{1}{2}n^2}{\dfrac{1}{3}n^3+\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{6}n}=\dfrac{3}{2}$
   (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$
   $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\dfrac{1}{2}$
   (3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(\sqrt{x+2}-1)\cdot(\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)\cdot(\sqrt{x+2}+1)}$
   $=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{(\sqrt{x+2}+1)}=\dfrac{1}{2}$
   (4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$
   $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-1}{x-2}=\dfrac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x^2-2x}$ 極限值不存在
   (5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}$

三、選填題

A. 設△ABC 的外接圓心爲 O，半徑爲 R，





$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\angle ABC}=2R \Rightarrow \dfrac{50}{\sin 60^\circ}=2R \Rightarrow R=\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$

故建築物的高度 $h=\overline{OQ}-\overline{OP}=300-\sqrt{3}R=250$ 公尺

B. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{c}=(-5,6,-9)$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 相鄰三邊所展開的平行六面體體積

$|\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})|=|-34|=34$

C. 原式 $=(\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}-\dfrac{1}{\cos 20^\circ})+(\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}-\dfrac{1}{\sin 10^\circ})$

$=(\dfrac{\sqrt{3}\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ})+(\dfrac{\sqrt{3}\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ\cdot\sin 10^\circ})$

$=(\dfrac{2\sin 40^\circ}{\dfrac{1}{2}\sin 40^\circ})+(\dfrac{2\sin(-20^\circ)}{\dfrac{1}{2}\sin 20^\circ})=4+(-4)=0$

D. 可得 $\begin{cases}ab=9\\a+b=-6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-3\\b=-3\end{cases}$

$\Rightarrow(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{-3}+\sqrt{-3})^2=(2\sqrt{3}i)^2=-12$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $(3,-1)$　(2) $\dfrac{5}{2}$

【詳解】

(1) $\dfrac{z_2}{z_1}=\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|\cdot[\cos(\dfrac{\pi}{4})+i\sin(\dfrac{\pi}{4})]=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$，……(2 分)

$z_2=(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i)\cdot z_1=(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i)\cdot(1+ai)=(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}a)+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a)i$

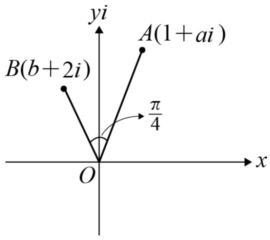
……(2 分)

求得 $a=3, b=-1$ ……(1 分)

(2) 如圖，$\overline{OA}=|z_1|=\sqrt{1^2+a^2}=\sqrt{10}$ ……(2 分)

$\overline{OB}=|z_2|=\sqrt{b^2+2^2}=\sqrt{5}$ ……(2 分)

三角形 OAB 的面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\sin(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{5}{2}$ ……(3 分)



二、(1) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$

【詳解】

(1) $A+B=I_2 \Rightarrow A=I_2-B \Rightarrow$

$A^2=(I_2-B)^2=B^2-2B+I_2$ ……(2 分)

$A^2+2A=(B^2-2B+I_2)+2(I_2-B)$

$=B^2-4B+3I_2=2I_2+3I_2=5I_2=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$……(3 分)

(2) $A^2+2A-5I_2=O_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}p$ ……(3 分)

$A^4+3A^3+A=(A^2+2A-5I_2)\cdot(A^2+A+3I_2)+15I_2$

$=\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$……(4 分)