

全國公私立高級中學

107 學年度指定科目第七次聯合模擬考試

考試日期：108 年 5 月 7~8 日

數學甲

— 作答注意事項 —

考試時間：80 分鐘

- 作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
 - 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
 - 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
 - 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{\square}{8}$ 畫記，如：

18	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\blacksquare}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$
19	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\blacksquare}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的 $\frac{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{\square}$ 畫記，如：

20	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\blacksquare}$	$\frac{\pm}{\square}$
21	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\blacksquare}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 24 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 小理一家五個人坐在一張圓桌聊天用餐，用餐前玩了一個遊戲，在每個人面前都放一個完全相同的硬幣，所有人同時翻轉自己的硬幣，若硬幣正面朝上，則這個人要站起來；若正面朝下，則這個人可以繼續坐著。求玩一次遊戲，沒有相鄰的兩個人同時站起來的機率為何？

(1) $\frac{5}{16}$

(2) $\frac{11}{32}$

(3) $\frac{15}{32}$

(4) $\frac{1}{2}$

(5) $\frac{2}{5}$

2. 複數 z_1, z_2 ，滿足 $|z_1| = |z_2| = 1$ ， $z_1 - z_2 = \frac{2-4i}{2+i}$ ，則 $z_1 \cdot z_2 = ?$

(1) 0

(2) i

(3) $-i$

(4) 1

(5) -1

3. 已知函數 $y=f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸，且當 $x>0$ 時， $f(x)=|\log_2 x|$ 。若 $a=f(-3), b=f(\frac{1}{4}), c=f(2)$ ，則 a, b, c 的大小關係為何？

(1) $a > b > c$

(2) $b > a > c$

(3) $b > c > a$

(4) $c > a > b$

(5) $c > b > a$

4. 已知點 $P(x, y)$ 是直線 $kx + y + 4 = 0 (k > 0)$ 上一動點， $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 是圓 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 的兩條切線， A, B 是兩切點， O 為圓心。若四邊形 $PAOB$ 的最小面積為 2，求 k 的值為何？

(1) 2

(2) $\sqrt{5}$

(3) $2\sqrt{2}$

(4) 3

(5) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

二、多選題(占 24 分)

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 關於平面 $E: x+y-z=1$ ，直線： $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ ， $L_2: \frac{x-8}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-8}{1}$ ，

$L_3: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{1}$ ，下列敘述哪些正確？

- (1) L_1 、 L_2 為相交兩直線
- (2) 直線 L_2 平行平面 E
- (3) 若一平面 E_1 包含直線 L_1 與 L_3 ，則 $(5,1,7)$ 為平面 E_1 的一個法向量
- (4) 若一平面 E_2 包含直線 L_2 且平行 L_1 ，則平面 E_2 必平行選項(3)中的平面 E_1
- (5) 若點 P 在直線 L_1 上，且點 Q 在直線 L_2 上，則 \overline{PQ} 的最短距離為 $5\sqrt{3}$

6. 設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0$ 為 n 次實係數多項式，則下列敘述哪些正確？

- (1) 若 $\frac{h}{m}$ 為方程式 $f(x)=0$ 的有理根，則 m 是 a_n 的因數， h 是 a_0 的因數
- (2) 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3-1}$ 存在，則 $x-1$ 為 $f(x)$ 的因式
- (3) 若 $n=5$ ，則 $f(x)$ 的圖形最多有 3 個反曲點
- (4) 若 $n=7$ ，則 $f(x)$ 至少有一個極值點
- (5) 若 $f(x)$ 為嚴格遞增函數，則 $f'(x)=0$ 沒有實根

7. 在坐標平面上，考慮二階方陣 $A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1 ，設 P_1 經 A 變換成 P_2 ， P_2 經 A 變換成 P_3 。令 $\overline{OP_1} = k$ ，試問下列哪些敘述是正確的？

(1) $\sin(\angle P_1OP_3) = \frac{24}{25}$

(2) $\triangle P_1P_2P_3$ 的面積為 $\frac{8}{25}k^2$

(3) $\overline{P_1P_3} = \frac{6}{5}k$

(4) 假設 P_1 是圖形 $y = \frac{1}{5}x^2 - 5$ 上的動點，則 $\triangle P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值為 6

(5) 承(4)，當 $\triangle P_1P_2P_3$ 面積最小時的 $P_1 = (\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{2})$

三、選填題(占 28 分)

說明：1. 第 A 至 D 題為選填題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(8-16)。

2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在 $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{AC} 上的一點， $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ ， $\angle DBC = 45^\circ$ ，若 $\angle C$ 為銳角， $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$ ， $\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，求 $\overline{CD} = \underline{\sqrt{8}}$ 。

B. 已知 a, b 為實數，函數 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 3}{x^{2n} - 5}$ ，若對所有的實數 x 滿足 $|x| \leq 1$ ，且 $f(x)$ 為連續函數，試求數對 (a, b) 的值為 $(\textcircled{9}, \textcircled{10} \textcircled{11})$ 。

C. 某商店舉行滿額抽獎促銷活動，顧客購買金額滿 1000 元，可根據下列方案甲抽獎一次，或顧客購買滿 1500 元，可根據方案乙抽獎一次，(例如：某顧客購買商品為 2600 元，則有三種抽獎方式可以選擇，分別為：根據方案甲抽兩次，或根據方案乙抽一次，或選方案甲乙各一次)。又抽獎的兩方案分別為：

方案甲：從裝有 2 個紅球，3 個白球(僅顏色不同)的袋中隨機抽出 2 球，若都是紅球，可得獎金 300 元，否則沒有獎金。兌獎後，球要放回甲袋中。

方案乙：從裝有 3 個紅球，2 個白球(僅顏色不同)的袋中隨機抽出 2 球，若都是紅球，可得獎金 150 元，否則沒有獎金。兌獎後，球要放回乙袋中。

若張太太到此商店購買商品金額為 3500 元，試問她抽獎所得獎金的期望值最多是 $\textcircled{12} \textcircled{13} \textcircled{14}$ 元。

D. 已知 \vec{a} ， \vec{b} 為兩個非零向量，且 $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ ，則 $|2\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{b}|$ 的最大值為 $\frac{\textcircled{15}}{\sqrt{\textcircled{16}}}$ 。

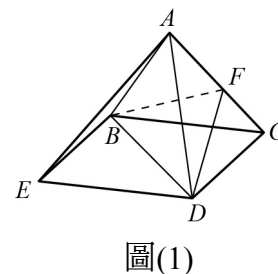
—————以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷—————

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、如圖(1)，四角錐 $A-BCDE$ 中， $\overline{AE}=4$ ， $\overline{AB}=2$ ， $\triangle ABC$ 是正三角形，四邊形 $BCDE$ 是矩形，若平面 ABC 與平面 $BCDE$ 互相垂直。

- (1) 當 \overline{AE} 平行平面 BFD 時，求平面 $BCDE$ 與平面 BFD 的兩面角為 θ ，求 $\sin\theta = ?$ (5 分)
- (2) 若 F 為 \overline{AC} 上一點，試問當 \overline{AE} 平行平面 BFD 時， \overline{AF} 的長度為何？(5 分)



二、已知兩拋物線 $T_1: y = x(x-2)$ ， $T_2: y = -x(x-6)$ ，則：

- (1) 設 p 為拋物線 T_1 外一點，已知過 p 且與 Γ 相切之二直線斜率分別為 -2 與 4 ，求 p 點坐標為何？(4 分)
- (2) 設兩拋物線 T_1, T_2 所圍成之區域的面積為 Ω ，試求 Ω 的面積為何？(5 分)
- (3) 承(2)，若 $y = kx$ 將 Ω 分成面積相等的兩塊區域，試求 k 的值為何？(5 分)

題本中之圖文已竭力追溯版權，倘有疏漏不慎侵犯版權之處，煩請合法持有版權者與本公司聯絡，謹此致謝。

每道試題均有著作權

嚴禁影印、拷貝、轉賣或轉檔上網營利。