

108 學年度全國高級中學  
學科能力測驗模擬考試

數學  
考  
科  
參  
考  
答  
案  
暨  
詳  
解

翰林出版事業股份有限公司



版權所有・翻印必究

# 數學考科詳解

|    |        |     |           |        |     |     |     |           |        |
|----|--------|-----|-----------|--------|-----|-----|-----|-----------|--------|
| 題號 | 1.     | 2.  | 3.        | 4.     | 5.  | 6.  | 7.  | 8.        | 9.     |
| 答案 | (3)    | (5) | (4)       | (3)    | (2) | (3) | (5) | (1)(2)(4) | (1)(3) |
| 題號 | 10.    | 11. | 12.       | 13.    |     |     |     |           |        |
| 答案 | (1)(5) | (5) | (3)(4)(5) | (3)(4) |     |     |     |           |        |

## 第壹部分：選擇題

### 一、單選題

1. (3)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：古典機率的定義，機率的反面運算

解析： $C_2^5 \times C_2^5 = 10 \times 10 = 100$ ，所以甲、乙兩校任選 2 天的所有可能情形有 100 種

$C_2^5 \times C_2^3 = 10 \times 3 = 30$ ，所以甲、乙兩校沒有選到同一天的情形有 30 種

$C_2^5 \times 1 = 10 \times 1 = 10$ ，所以甲、乙兩校選到的 2 天都相同的情形有 10 種

因此， $1 - \frac{30}{100} - \frac{10}{100} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ ，故選(3)。

〈另解〉

甲、乙兩校任選 2 天的所有可能情形有  $C_2^5 \times C_2^5 = 100$  種

甲、乙兩校選擇的 2 天中恰 1 天相同的情形有  $C_1^5 \times C_1^4 \times C_1^3 = 60$  種

因此，所求機率為  $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

故選(3)。

2. (5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數為正整數與負整數的運算

解析： $6000 = 6 \times 5^3 \times 8$ ，因此 6 整除 6000，但  $6^2$  不整除 6000， $5^3$  整除 6000，但  $5^4$  不整除 6000

若  $n = a$ ， $a$  為正整數，則  $6000 \times \left(\frac{5}{6}\right)^a = \frac{6000 \times 5^a}{6^a}$  為整數時， $a = 1$

若  $n = -b$ ， $b$  為正整數，則  $6000 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{-b} = \frac{6000 \times 6^b}{5^b}$  為整數時， $b = 1, 2, 3$

若  $n = 0$ ，則  $6000 \times \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 6000$ ，恰為整數

因此，此題中  $n = -3, -2, -1, 0, 1$

故選(5)。

3. (4)

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標： $\vec{u} \times \vec{v}$  與  $\vec{u}$  垂直，也與  $\vec{v}$  垂直

解析：由題意可知  $\vec{OA}$ ， $\vec{OB}$ ， $\vec{OC}$  兩兩互相垂直，所以任意兩向量所張成的四邊形皆為長方形

令  $|\vec{OB}| = x$

由  $|\vec{OA} \times \vec{OB}| = |\vec{OC}|$  可知， $|\vec{OC}| = 4x \sin 90^\circ = 4x$

由  $|\vec{OB} \times \vec{OC}| = |\vec{OA}|$  可知， $x \times 4x \sin 90^\circ = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

因此  $|\vec{OA}| = 4$ ， $|\vec{OB}| = 1$ ， $|\vec{OC}| = 4$

所以  $T_1 = 4$ ， $T_2 = 16$ ， $T_3 = 4 \Rightarrow T_1 + T_2 + T_3 = 24$

故選(4)。

4. (3)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：集合，邏輯推理，列舉法，刪除法

解析：所有可能性如下表

| 提示   | 主持人所抽卡片的所有可能性 |      |      |      |      |      |      |
|------|---------------|------|------|------|------|------|------|
| $AB$ | $AB$          | $AC$ | $AD$ | $AE$ | $BC$ | $BD$ | $BE$ |
| $CD$ |               | $AC$ | $AD$ |      | $BC$ | $BD$ |      |
| $AC$ |               | $AC$ | $AD$ |      | $BC$ |      |      |
| $BD$ |               |      | $AD$ |      | $BC$ |      |      |
| $CE$ |               |      |      |      | $BC$ |      |      |

故選(3)。

5. (2)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：兩直線垂直時斜率乘積為 $-1$ ，指數方程式

解析：直線  $L$  的斜率為  $\frac{4^a - 2^a}{4 - 2} = \frac{4^a - 2^a}{2}$ ，直線  $M: 2x + 6y = 5$  的斜率為  $-\frac{1}{3}$

因為兩直線垂直，所以  $\left(\frac{4^a - 2^a}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow 4^a - 2^a = 6 \Rightarrow (2^a)^2 - 2^a - 6 = 0$

$\Rightarrow (2^a - 3)(2^a + 2) = 0 \Rightarrow 2^a = 3$  或  $-2$  (不合)，因此  $2^a = 3 \Rightarrow a = \log_2 3$ ，故選(2)。

6. (3)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：等比數列的定義，整除性質

解析：若公比為整數，令公比為  $a$ ，則此等比數列為  $32, 32a, 32a^2, 32a^3$

若公比不為整數，考慮到此等比數列每一項都是正整數，且首項為  $32$ ，可知公比為  $\frac{b}{2}$  的形式，則此等比數列為  $32, 16b, 8b^2, 4b^3$

由以上討論可知，無論如何，此等比數列的每一項都是  $4$  的倍數，因此  $162$  不可能出現在小明挑選的數之中，故選(3)。詳細舉例說明如下

(1)(2)×：當公比  $r = \frac{3}{2}$  時，此等比數列為  $32, 48, 72, 108$

(3)○：因為  $\frac{162}{32} = \frac{81}{16} = \left(\frac{9}{4}\right)^2$ ，當公比  $r = \frac{9}{4}$  時，此等比數列為  $32, 72, 162, \frac{729}{2}$ ，第四項不為正整數

(4)×：當公比  $r = \frac{5}{2}$  時，此等比數列為  $32, 80, 200, 500$

(5)×：當公比  $r = 2$  時，此等比數列為  $32, 64, 128, 256$

故選(3)。

7. (5)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中的平面方程式，空間中的直線方程式，平面法向量，空間中的正射影長，空間中直線的位置判定

解析：(1)×： $xy$  平面的方程式為  $z = 0$ ，法向量應為  $k(0, 0, 1)$  的形式，其中  $k$  為任意非零實數

(2)×： $A(1, 2, 3)$  在  $xy$  平面的投影點為  $A'(1, 2, 0)$ ，

$B(2, 4, 1)$  在  $xy$  平面的投影點為  $B'(2, 4, 0)$ ，故  $a = \overline{A'B'} = \sqrt{5}$

(3)×：①  $\vec{n} = (2, 1, 2)$  為平面  $E: 2x + y + 2z = 10$  的法向量之一， $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -2)$

因為  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$ ，所以  $\vec{n} = (2, 1, 2)$  與  $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -2)$  垂直

②將  $A(1, 2, 3)$  代入平面  $E: 2x + y + 2z = 10$  成立，得知  $A$  點在平面  $E$  上

由①、②知平面  $E: 2x + y + 2z = 10$  包含直線  $AB$ ，故不平行

〈另解〉將  $A(1, 2, 3)$  與  $B(2, 4, 1)$  代入平面  $E: 2x + y + 2z = 10$  皆成立

可得知平面  $E: 2x + y + 2z = 10$  包含直線  $AB$ ，故不平行

(4)×：由(3)得知平面  $E: 2x + y + 2z = 10$  包含直線  $AB$ ，故  $b = \overline{AB} = 3$

所以  $b > a$

(5)○：直線  $AB$  上的動點  $P$  可用  $(x, y, z) = (1 + t, 2 + 2t, 3 - 2t)$ ，其中  $t \in R$  表示

當  $t = -1$  時，動點  $P(x, y, z) = (1 + (-1), 2 + 2 \times (-1), 3 - 2 \times (-1)) = (0, 0, 5)$  會在  $z$  軸上，所以直線  $AB$  與  $z$  軸相交於點  $(0, 0, 5)$

故選(5)。

## 二、多選題

8. (1)(2)(4)

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：三元一次線性方程組唯一解、無解的判定

解析：由原方程組可得 
$$\begin{cases} x + y + cz = 0 \\ (c-1)y - (c-1)z = 1 \\ y + z = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + cz = 0 \\ (c-1)(y-z) = 1 \\ y + z = d \end{cases}$$

若  $c \neq 1$ ，則  $y - z = \frac{1}{c-1} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \left( d + \frac{1}{c-1} \right)$ ， $z = d - y$ ， $x = -y - cz$ ，此時方程組為唯一解

若  $c = 1$ ，則原方程組為 
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ y + z = d \end{cases}$$
，此時方程組無解

故選(1)(2)(4)。

〈另解〉

由矩陣的列運算可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & c & 0 \\ 1 & c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & c & 0 \\ 0 & c-1 & 1-c & 1 \\ 0 & 1 & 1 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\leftarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & c-1 & 1-c & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times-(c-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2-2c & 1-d(c-1) \end{bmatrix}$$

若  $c \neq 1$ ，增廣矩陣可化簡為 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-d(c-1)}{2-2c} \end{bmatrix}$$
，此時方程組有唯一解

若  $c = 1$ ，增廣矩陣可化簡為 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
，此時方程組無解

故選(1)(2)(4)。

9. (1)(3)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第四冊第三章〈矩陣〉

目標：應用問題轉化為矩陣運算

解析：(1) ○ (2) ×：若第  $n$  天與第 1 天的早餐相同，則第  $n+1$  天欲選擇跟第 1 天相同的早餐，此時第  $n+1$  天有 0 種選擇。若第  $n$  天與第 1 天的早餐不同，則第  $n+1$  天欲選擇跟第 1 天相同的早餐，此時第  $n+1$  天有 1 種選擇。因此  $a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times 1$

若第  $n$  天與第 1 天的早餐相同，則第  $n+1$  天欲選擇跟第 1 天不同的早餐，此時第  $n+1$  天要避開第 1 天與第  $n$  天的早餐，有 3 種選擇。若第  $n$  天與第 1 天的早餐不同，則第  $n+1$  天欲選擇跟第 1 天不同的早餐，此時第  $n+1$  天要避開第 1 天與第  $n$  天的早餐，有 2 種選擇

因此  $b_{n+1} = a_n \times 3 + b_n \times 2$

由以上推論，可得 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ 且 } \begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(3) ○ (4) ×：
$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 84 \end{bmatrix}$$

(5) ×：第  $n+1$  天內所有選擇早餐的情況數為  $4 \times 3^n$ ，因此  $a_{n+1} + b_{n+1} = 4 \times 3^n$

又因為  $a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times 1 = b_n$ ，因此  $b_n + b_{n+1} = 4 \times 3^n$ ，有可能會小於  $4^n$

例如  $n=5$  時， $4 \times 3^5 = 972 < 1024 = 4^5$

故選(1)(3)。

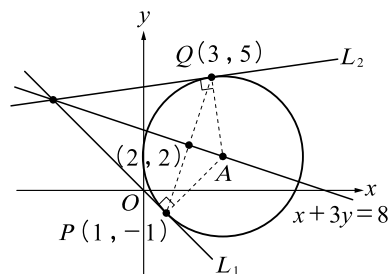
## 10. (1)(5)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：切線與切點與圓心三者之間的關聯性

解析：(1) ○：令圓心為  $A$ ，直線  $AP$  垂直直線  $L_1$ 因此直線  $AP$  的方程式為  $y = x - 2 \Rightarrow x - y = 2$ (2) ×：  $\overrightarrow{PQ} = (2, 6) = 2(1, 3)$ ， $\overline{PQ}$  中點為  $(2, 2)$ 可推得  $\overline{PQ}$  的中垂線為  $x + 3y = 8$ 解  $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$ ，可得圓心  $A\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (3) ×：半徑  $\overline{AP} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} < \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$ (4) ×：直線  $AQ$  的斜率為  $\frac{5 - \frac{3}{2}}{3 - \frac{7}{2}} = -7$ ，因直線  $AQ$  垂直直線  $L_2$ 因此直線  $L_2$  的斜率為  $\frac{1}{7}$ (5) ○：直線  $L_1$  的斜率為  $-1$ ，且包含  $P(1, -1)$ ，因此直線  $L_1$  方程式為  $y = -x$ 直線  $L_2$  的斜率為  $\frac{1}{7}$ ，且包含  $Q(3, 5)$ ，因此直線  $L_2$  方程式為  $y = \frac{1}{7}x + \frac{32}{7}$ 解  $\begin{cases} y = -x \\ y = \frac{1}{7}x + \frac{32}{7} \end{cases}$ ，可得交點為  $(-4, 4)$ 

故選(1)(5)。



## 11. (5)

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：柯西不等式極值發生時的條件

解析：  $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 4$ ，  $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$ ，  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2a + b + 2c$ (1) ×：若  $\vec{u}$  與  $\vec{v}$  平行，則  $\frac{a}{2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{2} \Rightarrow a = 2b$ ，與  $a \neq 2b$  矛盾，所以  $\vec{u}$  與  $\vec{v}$  不可能平行(2) ×：由柯西不等式可知  $(a^2 + b^2 + c^2)(2^2 + 1^2 + 2^2) \geq (2a + b + 2c)^2$   
 $\Rightarrow 16 \times 9 \geq (2a + b + 2c)^2 \Rightarrow -12 \leq 2a + b + 2c \leq 12$ 當  $2a + b + 2c = 12$  或  $-12$  時，需  $\frac{a}{2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{2}$ 即  $\vec{u} = (a, b, c)$  與  $\vec{v} = (2, 1, 2)$  平行，但此與  $a \neq 2b$  矛盾所以  $2a + b + 2c \neq \pm 12$ ，所以  $-12 < 2a + b + 2c < 12$ 因此  $2a + b + 2c$  的最大值不存在(3) ×：承(2)，  $-12 < 2a + b + 2c < 12 \Rightarrow -12 < \vec{u} \cdot \vec{v} < 12$ ，因此  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  不可能為 15(4) ×：假設  $\vec{u}$  與  $\vec{v}$  的夾角為  $\theta$ ，若  $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$ ，則 $|\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$  或  $180^\circ$ 即  $\vec{u}$  與  $\vec{v}$  平行，與(1)的推論矛盾(5) ○：  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = 2|\vec{v}| \Rightarrow |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times |\cos \theta| = 2|\vec{v}| \Rightarrow |\vec{u}| |\cos \theta| = 2$  $\Rightarrow 4|\cos \theta| = 2 \Rightarrow |\cos \theta| = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta = 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ 〈另解〉若  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = 2|\vec{v}| = 6$ ，已知  $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 + |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \times |\vec{v}|^2 = 144$ 因此  $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = 144 - 6^2 = 108 \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = 6\sqrt{3}$ 

故選(5)。

## 12. (3)(4)(5)

出處：第三冊第一章〈三角〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：正弦、餘弦定理，倍角公式，三角形面積公式，向量內積

解析：如題圖， $\angle CBD = 180^\circ - \angle BDC - \angle BCD = 180^\circ - 3\theta$

由三倍角公式可知  $\sin \angle CBD = \sin(180^\circ - 3\theta) = \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

(1)  $\times$ ：由於大邊對大角，所以  $\angle CBD > \angle BDC \Rightarrow 180^\circ - 3\theta > \theta \Rightarrow 180^\circ > 4\theta \Rightarrow \angle BDC = \theta < 45^\circ$

$$\begin{aligned} \langle \text{另解} \rangle \text{ 由正弦定理可知 } \frac{\overline{CD}}{\sin \angle CBD} &= \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BDC} \Rightarrow \frac{5}{\sin 3\theta} = \frac{3}{\sin \theta} \\ \Rightarrow \frac{5}{3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta} &= \frac{3}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{5}{3 - 4 \sin^2 \theta} = 3 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

由於  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$  且  $\theta$  為銳角

所以  $0^\circ < \theta < 45^\circ$

(2)  $\times$ ： $\cos \angle BCD = \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = \frac{1}{3}$

(3)  $\circ$ ：在  $\triangle BCD$  中，由餘弦定理可知  $\overline{BD}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \cos 2\theta = 24 \Rightarrow \overline{BD} = 2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} \langle \text{另解} \rangle \cos \theta &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 由正弦定理可知 } \frac{\overline{BD}}{\sin \angle BCD} = \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BDC} \\ \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\sin 2\theta} &= \frac{3}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{3}{\sin \theta} \Rightarrow \overline{BD} = 6 \cos \theta = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

(4)  $\circ$ ：由於對角互補，所以  $\angle BAD = 180^\circ - 2\theta$

$$\cos \angle BAD = \cos(180^\circ - 2\theta) = -\cos 2\theta = \frac{-1}{3} < 0, \text{ 可知 } \angle BAD \text{ 為鈍角}$$

因此  $\angle ABD$  為銳角，可推得  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} > 0$

$$(5) \circ : \sin \angle BAD = \sin(180^\circ - 2\theta) = \sin 2\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{又 } \triangle ABD \text{ 的面積為 } 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{AD} \sin \angle BAD = 4 \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AD} = 6\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overline{AB} \times \overline{AD} \cos \angle BAD = 6\sqrt{2} \times \left(\frac{-1}{3}\right) = -2\sqrt{2}$$

故選(3)(4)(5)。

## 13. (3)(4)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：二維數據分析圖形的判讀，迴歸直線的斜率  $m = r \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

解析：(1)  $\times$ ：由散佈圖可知相關係數為正數

$$(2) \times : \mu_Y = 37.3\mu_X + 63.6 = 37.3 \times 1.12 + 63.6 = 105.376 > 103$$

$$(3) \circ : \text{迴歸直線的斜率 } m = r \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \Rightarrow 37.3 = r \frac{\sigma_Y}{0.63} \Rightarrow \sigma_Y = \frac{37.3 \times 0.63}{r} = \frac{23.499}{r}$$

$$\text{因為 } 0 < r < 1, \text{ 所以 } \sigma_Y = \frac{23.499}{r} > 23.499 > 20$$

$$(4) \circ : \text{因為 } \sigma_{X'} \approx 2.24\sigma_X, \text{ 所以 } \sigma_{X'} > \sigma_X = 0.63$$

(5)  $\times$ ：已知  $X'$  與  $Y$  的相關係數和  $X$  與  $Y$  的相關係數相同，且  $\sigma_{X'} > \sigma_X$ ，

$$\text{因此 } Y \text{ 對 } X' \text{ 的迴歸直線斜率 } m' = r \frac{\sigma_Y}{\sigma_{X'}} < r \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = m = 37.3$$

故選(3)(4)。

## 第貳部分：選填題

A. 4

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：虛根成對定理，根與係數關係，算幾不等式

解析：由虛根成對定理可知另一根為  $a-bi$

再由根與係數關係，可知  $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=8$

因為  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}=ab$ ，所以  $ab \leq 4$

等號成立時可推得  $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$

又因為  $a^2+b^2=8$ ，所以  $a=b=2$

此時方程式為  $x^2-4x+8=0$ ，此時兩虛根為  $2 \pm 2i$ ， $ab=4$ 。

B.  $\frac{7}{3}$

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：絕對值方程式的運算

解析：當  $1 \leq x \leq 3$  時， $|x-1|+|x-2|+|x-3| \leq 3 < 4$

當  $x < 1$  時， $|x-1|+|x-2|+|x-3|=4 \Rightarrow 6-3x=4 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

當  $x > 3$  時， $|x-1|+|x-2|+|x-3|=4 \Rightarrow 3x-6=4 \Rightarrow x=\frac{10}{3}$

$x=\frac{2}{3}$  代入  $|x-4|+|x-5|$  可得  $\left|\frac{2}{3}-4\right|+\left|\frac{2}{3}-5\right|=\frac{23}{3}$

$x=\frac{10}{3}$  代入  $|x-4|+|x-5|$  可得  $\left|\frac{10}{3}-4\right|+\left|\frac{10}{3}-5\right|=\frac{7}{3}$

故所求為  $\frac{7}{3}$ 。

C. 29

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：文氏圖，取捨原理

解析：假設訂雞排的人為  $A$  集合，訂珍奶的人為  $B$  集合，訂嫩仙草的人為  $C$  集合，則

$n(A)=42-19=23$ ，訂雞排有 23 人

$n(B)=42-13=29$ ，訂珍奶有 29 人

$n(C)=42-23=19$ ，訂嫩仙草有 19 人

$n(A \cup B \cup C)=42$ ， $n(A \cap B \cap C)=0$

$$\begin{cases} a+x+z=23 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b+x+y=29 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \\ c+y+z=19 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \\ a+b+c+x+y+z=42 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

由  $\textcircled{1}+\textcircled{2}+\textcircled{3} \Rightarrow (a+b+c)+2(x+y+z)=71 \cdots \cdots \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{5}-\textcircled{4} \Rightarrow x+y+z=29$ ，所以恰訂了兩項外食的有 29 位同學。

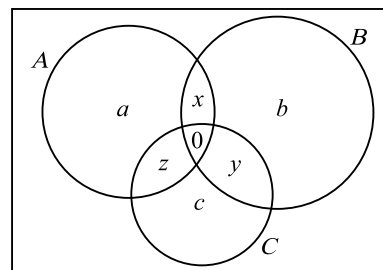
〈另解〉由取捨原理可知，

$$n(A \cup B \cup C) = [n(A)+n(B)+n(C)] - [n(A \cap B)+n(A \cap C)+n(B \cap C)] + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow 42=23+29+19 - [n(A \cap B)+n(A \cap C)+n(B \cap C)] + 0$$

$$\Rightarrow n(A \cap B)+n(A \cap C)+n(B \cap C)=23+29+19-42=29$$

$$\text{所求為 } n(A \cap B)+n(A \cap C)+n(B \cap C)-3 \times n(A \cap B \cap C)=29-0=29。$$



D.  $\sqrt{3}-1$

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

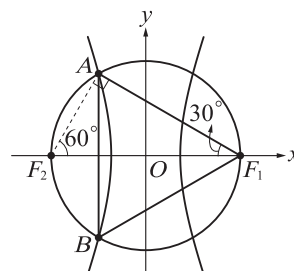
目標：雙曲線基本定義，特殊三角形的邊角關係

解析：畫輔助線如右圖， $\overline{F_1F_2}$  為圓的直徑

所以  $\triangle AF_1F_2$  為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  的直角三角形

$$\overline{F_1F_2}=2\overline{OF_1}=2 \Rightarrow \overline{AF_2}=1, \overline{AF_1}=\sqrt{3}$$

故雙曲線的實軸長為  $|\overline{AF_1}-\overline{AF_2}|=\sqrt{3}-1$ 。



E.  $\frac{5}{2}$

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：正弦、餘弦定理，差角公式

解析：已知  $\cos \angle BAD = \frac{-\sqrt{7}}{14}$ ，因此  $\sin \angle BAD = \frac{3\sqrt{21}}{14}$

由餘弦定理可知， $\cos \angle CAD = \frac{1^2 + \sqrt{7}^2 - 2^2}{2 \times 1 \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

因此  $\sin \angle CAD = \frac{\sqrt{21}}{7}$

$\sin \angle BAC = \sin(\angle BAD - \angle CAD) = \sin \angle BAD \cos \angle CAD - \cos \angle BAD \sin \angle CAD$

$$= \frac{3\sqrt{21}}{14} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} - \left( \frac{-\sqrt{7}}{14} \right) \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{6\sqrt{3}}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

由正弦定理可知， $\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{5}{2}$ 。

F. 2

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：點斜式，直線的參數式，行列式算三角形面積

解析：直線  $AB$  通過點  $(7, 2)$ ，而  $t=1$  代入直線  $AC$  的參數式  $\begin{cases} x=3t+4 \\ y=t+1 \end{cases}$  恰為  $(7, 2)$

因此  $A$  點坐標為  $(7, 2)$

直線  $BC$  通過點  $(4, 1)$ ，而  $t=0$  代入直線  $AC$  的參數式  $\begin{cases} x=3t+4 \\ y=t+1 \end{cases}$  恰為  $(4, 1)$

因此  $C$  點坐標為  $(4, 1)$

直線  $AB$  的方程式為  $y=x-5$ ，直線  $BC$  的方程式為  $x+y=5$

$\begin{cases} y=x-5 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (5, 0)$ ，因此  $B$  點坐標為  $(5, 0)$

$\overrightarrow{AB} = (-2, -2)$ ， $\overrightarrow{AC} = (-3, -1)$

故  $\triangle ABC$  的面積為  $|\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}| = 2$ 。

G.  $(0, 4)$

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：空間中直線的對稱比例式與參數式

解析： $A, B$  在  $y$  軸上，設  $A(0, y_a, 0)$ 、 $B(0, y_b, 0)$

將  $A(0, y_a, 0)$  代入  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ ，可得  $y_a = 0$

將  $B(0, y_b, 0)$  代入  $\frac{x}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-a}{b}$  上，可得  $\frac{0}{2} = \frac{y_b-6}{1} = \frac{0-a}{b} \Rightarrow y_b = 6, a = 0$

因為直線  $AC$  的方程式為  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ ，因此可令  $C(t, 2t, 2t)$ ， $t \in \mathbb{R}$

將  $C(t, 2t, 2t)$  代入直線  $BC$  方程式  $\frac{x}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z}{b}$

可得  $\frac{t}{2} = \frac{2t-6}{1} = \frac{2t}{b} \Rightarrow t = 4, b = 4$

故數對  $(a, b) = (0, 4)$ 。

附註： $A(0, 0, 0)$ ， $B(0, 6, 0)$ ， $C(4, 8, 8)$