

108 學年度全國高級中學
學科能力測驗模擬考試
數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{(18)}{(19)}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{}$ 與第 19 列的 $\frac{}{8}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 \square 與第 21 列的 \square 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input checked="" type="text"/>	<input type="text"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input checked="" type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利



版權所有・翻印必究

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1. 題至第 7. 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 甲、乙兩校依據教育部規定，在每一週星期一至五的早自習中固定選擇 2 天，由學生自主規劃運用，以培養主動學習的精神。若兩校選擇自主規劃的時間為獨立事件，試問甲、乙兩校選擇的 2 天中恰有 1 天相同的機率為何？

- (1) $\frac{2}{5}$
- (2) $\frac{1}{2}$
- (3) $\frac{3}{5}$
- (4) $\frac{7}{10}$
- (5) $\frac{4}{5}$

2. 試問有多少個整數 n ，可以使得 $6000 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$ 為整數？

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 5 個

3. 空間中， \vec{OA} ， \vec{OB} ， \vec{OC} 皆為非零向量，已知 $\vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{OC}$ ， $\vec{OB} \times \vec{OC} = \vec{OA}$ ，且 $\vec{OC} \times \vec{OA}$ 與 \vec{OB} 平行。若 $|\vec{OA}|=4$ ，且令 \vec{OA} ， \vec{OB} 所張成的四邊形面積為 T_1 ， \vec{OA} ， \vec{OC} 所張成的四邊形面積為 T_2 ， \vec{OB} ， \vec{OC} 所張成的四邊形面積為 T_3 ，則 $T_1+T_2+T_3$ 之值為下列哪一個選項？
- (1) 12
 - (2) 16
 - (3) 20
 - (4) 24
 - (5) 32
4. 有一個猜英文字母的遊戲，進行的方式是給定 10 張卡片，上面分別寫著 AB 、 AC 、 AD 、 AE 、 BC 、 BD 、 BE 、 CD 、 CE 、 DE 。主持人先從這 10 張卡片中任意抽選一張，由小淳來猜測這張卡片上的字母。每經過一分鐘，主持人會給小淳一個提示，提示方法是主持人會寫下兩個字母，例如提示 AB ，則表示主持人所抽的卡片上必定有字母 A 或 B ，因此小淳可以推測出主持人所抽的卡片可能是 AB 、 AC 、 AD 、 AE 、 BC 、 BD 、 BE 這 7 種可能。已知遊戲過程中，主持人每經過一分鐘給出的提示依序為 AB 、 CD 、 AC 、 BD 、 CE 、 BC 、 BE ，請問小淳最早在哪一個提示時，就可以確實推測出主持人所抽的卡片為 BC ？
- (1) BE
 - (2) BC
 - (3) CE
 - (4) BD
 - (5) AC
5. 在坐標平面上，若直線 L 通過點 $(2, 2^a)$ 與 $(4, 4^a)$ ，且與直線 $M: 2x+6y=5$ 垂直，則 a 的值為下列哪一個選項？
- (1) $\log_3 2$
 - (2) $\log_2 3$
 - (3) $\log_5 2$
 - (4) $\log_2 5$
 - (5) 無法判斷

6. 小明從 1 到 500 的正整數中挑選 4 個相異的數字，使這 4 個數由小到大排列後形成一個等比數列。已知此等比數列的第一項(首項)為 32，則下列哪一個數不可能出現在小明挑選的 4 個數之中？
- (1) 48
 - (2) 108
 - (3) 162
 - (4) 200
 - (5) 256
7. 空間中兩點 $A(1, 2, 3)$ ， $B(2, 4, 1)$ ，令線段 \overline{AB} 在 xy 平面、平面 $E: 2x + y + 2z = 10$ 的投影長度分別為 a 、 b ，請選出正確的選項。
- (1) $(1, 1, 0)$ 為 xy 平面的法向量
 - (2) $a = 2$
 - (3) 直線 AB 與平面 E 平行
 - (4) $a > b$
 - (5) 直線 AB 與 z 軸相交

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8. 題至第 13. 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 設 c, d 為實數，下列有關線性方程組
$$\begin{cases} x + y + cz = 0 \\ x + cy + z = 1 \\ y + z = d \end{cases}$$
 的敘述哪些是正確的？
- (1) 若此線性方程組有解，則必定恰有一組解
 - (2) 若此線性方程組有解，則 $c \neq 1$
 - (3) 若此線性方程組有解，則 $d = 0$
 - (4) 若此線性方程組無解，則 $c = 1$
 - (5) 若此線性方程組無解，則 $d \neq 0$

9. 設 n 為正整數。蕾貝卡每天從漢堡、三明治、小籠湯包、饅頭夾蛋這 4 種選擇 1 種當早餐，每天的早餐必須和前一天不同。令連續 n 天所有選擇早餐的情況中，第 n 天與第 1 天選擇早餐相同的情況數為 a_n ，第 n 天與第 1 天選擇早餐不同的情況數為 b_n 。因此 $a_1=4$ ， $b_1=0$ ，

$a_2=0$ ， $b_2=12$ 。已知 $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$ ，對所有的正整數 n 恆成立，請選出正確的選項。

(1) $\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} q \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) $a_4=24$

(4) $b_4=72$

(5) 對於所有的正整數 n ，恆有 $b_n + b_{n+1} \geq 4^n$

10. 坐標平面上，一圓 Γ 與兩直線 L_1 、 L_2 分別相切於 $P(1, -1)$ 、 $Q(3, 5)$ 兩點。已知直線 L_1 的斜率為 -1 ，請選出正確的選項。

(1) 圓 Γ 的圓心在直線 $x-y=2$ 上

(2) 圓 Γ 的圓心坐標為 $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(3) 圓 Γ 的半徑大於 4

(4) 直線 L_2 的斜率為 0

(5) 直線 L_1 與 L_2 的交點坐標為 $(-4, 4)$

11. 坐標空間中，已知向量 $\vec{u} = (a, b, c)$ ， $\vec{v} = (2, 1, 2)$ ，其中 $a^2 + b^2 + c^2 = 16$ ，且 $a \neq 2b$ 。請選出正確的選項。

(1) 向量 \vec{u} 可能平行向量 \vec{v}

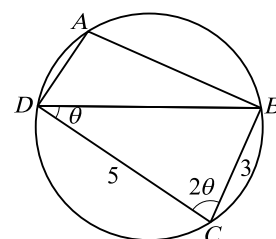
(2) $2a + b + 2c$ 的最大可能值為 12

(3) 可找到向量 \vec{u} 使得 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$

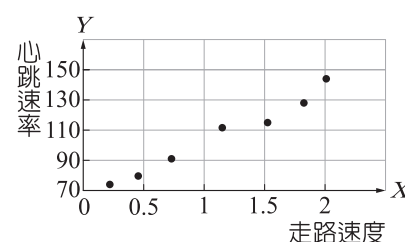
(4) $|\vec{u} \times \vec{v}|$ 之值可能為 0

(5) 若向量 \vec{u} 滿足 $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = 2|\vec{v}|$ ，則 $|\vec{u} \times \vec{v}| = 6\sqrt{3}$

12. 如右圖(此為示意圖)，圖中 $ABCD$ 為圓內接四邊形，已知 $\triangle ABD$ 的面積為 4， $\overline{BC}=3$ ， $\overline{CD}=5$ ， $\angle BCD=2\angle BDC$ ，請選出正確的選項。



- (1) $\angle BDC > 45^\circ$
 - (2) $\cos \angle BCD = \frac{2}{3}$
 - (3) $\overline{BD} = 2\sqrt{6}$
 - (4) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} > 0$
 - (5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -2\sqrt{2}$
13. 某人想要測量自己走路速度與心跳速率的關係，他記錄了 7 筆在不同走路速度下的心跳速率資料，將走路速度以 X 表示，其單位為公尺 / 秒(簡寫為 m/s)；心跳速率以 Y 表示，其單位為每分鐘的次數(簡寫為 bpm)，將 X, Y 畫成散佈圖如右。已知 Y 對 X 的迴歸直線方程式為 $y=37.3x+63.6$ ，其中 X 的算術平均數為 1.12，標準差為 0.63。請選出正確的選項。



- (1) X 與 Y 的相關係數為負數
- (2) Y 的算術平均數小於 103
- (3) Y 的標準差大於 20
- (4) 在國外常用英里 / 小時(簡寫為 mph)作為速度單位，已知 $1 \text{ m/s} \approx 2.24 \text{ mph}$ ，若以 X' 表示將 X 的單位換算成 mph 後的走路速度，則 X' 的標準差會大於 0.63
- (5) 承(4)， Y 對 X' 的迴歸直線斜率大於 37.3

第貳部分：選填題（占 35 分）

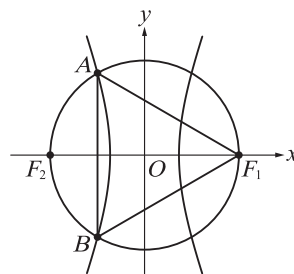
說明：1. 第 A. 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14—25)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 已知實係數二次方程式 $x^2 + cx + 8 = 0$ 有一根為 $a + bi$ ，其中 a, b 均為正數， $i = \sqrt{-1}$ ，則 ab 的最大可能值為 14。

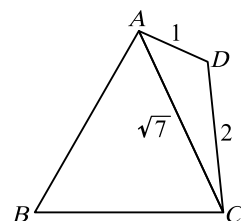
- B. 設 x 為實數且滿足 $|x-1|+|x-2|+|x-3|=4$ ，則 $|x-4|+|x-5|$ 的最小值為 $\frac{15}{16}$ 。
(化為最簡分數)

- C. 某班級共 42 位同學，因慶祝排球比賽冠軍要訂購外食，他們選定了雞排，珍奶和嫩仙草等 3 項外食。統計結果如下：有 19 人沒訂雞排，有 13 人沒訂珍奶，有 23 人沒訂嫩仙草，且每個人至少都有訂一項，但沒有人三項都訂，則有 17 18 位同學恰訂了兩項外食。

- D. 雙曲線 Γ 的圖形如右(此為示意圖)，其中 F_1, F_2 為焦點， O 為原點。
 A, B 是以 O 為圓心， $\overline{OF_1}$ 為半徑的圓與 Γ 的交點。已知 $\triangle ABF_1$ 為正三角形，且 $\overline{OF_1} = 1$ ，則 Γ 的實軸長為 $\sqrt{19}-20$ 。(化為最簡根式)



- E. 如右圖(此為示意圖)， $ABCD$ 為平面上的四邊形，已知 $\overline{AD} = 1$ ， $\overline{CD} = 2$ ， $\overline{AC} = \sqrt{7}$ ，且 $\cos \angle BAD = \frac{-\sqrt{7}}{14}$ ， $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{21}}{5}$ ，則 $\overline{BC} = \frac{21}{22}$ 。
(化為最簡分數)



- F. 坐標平面上，已知直線 AB 的斜率為 1，且通過點 $(7, 2)$ 。若直線 BC 的法向量為 $\vec{n} = (1, 1)$ ，且通過點 $(4, 1)$ ，直線 AC 的參數式為 $\begin{cases} x=3t+4 \\ y=t+1 \end{cases}$ ， $t \in R$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為 23。

- G. 坐標空間中，直線 AB 表 y 軸，直線 AC 的方程式為 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ ，直線 BC 的方程式為 $\frac{x}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-a}{b}$ ，則數對 $(a, b) = (24, 25)$ 。

參考公式及可能用到的數值

1. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B)=\sin A \cos B+\cos A \sin B$

$$\cos(A+B)=\cos A \cos B-\sin A \sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A \tan B}$$

2. 三角函數的三倍角公式： $\sin 3\theta=3 \sin \theta-4 \sin^3 \theta$

$$\cos 3\theta=4 \cos^3 \theta-3 \cos \theta$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$$\triangle ABC \text{ 的餘弦定理：} c^2=a^2+b^2-2ab \cos C$$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$, 算術平均數 $\mu_X=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2-\mu_X^2}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

$$\text{相關係數 } r_{XY}=\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\text{迴歸直線 (最適合直線) 方程式為 } y-\mu_Y=r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{7} \approx 2.6458$, $\sqrt{21} \approx 4.5826$, $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$, $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, $\log_{10} 5 \approx 0.6990$, $\log_{10} 7 \approx 0.8451$