

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
5	2	3	1234	345	35	134	2	9	1	6	2	5	

第壹部分：選擇題

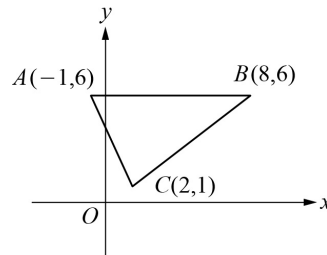
一、單選題

- 因為底數為 $\frac{1}{2}$ (其中 $0 < \frac{1}{2} < 1$)，
且 $0.2 < 0.4 < 0.8 < 1.6 < 3.2$ ，
所以 $(\frac{1}{2})^{0.2} > (\frac{1}{2})^{0.4} > (\frac{1}{2})^{0.8} > (\frac{1}{2})^{1.6} > (\frac{1}{2})^{3.2}$
- 由題意可知 $f(3)=5$ ， $f(1)=1$ ， $f(2)=2$ ，
設 $f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+px+q$ ，
又 $f(2)=2p+q=2$ ， $f(3)=3p+q=5$ ，
所以 $p=3$ ， $q=-4$ ， $p+q=-1$
- 先排第一列「我為人人」，共 $\frac{4!}{2!}=12$ 種，再排第二列，因為
同行異字，只有二種符合：「人人為我」或「人人我為」，
共 $12 \times 2 = 24$ 種

二、多選題

- <方法一>
(1) 過 $P(-2, 4)$ 平行 $\vec{v}=(1, -2)$ 的直線參數式
 $L_1: \begin{cases} x=-2+t \\ y=4-2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ ，當 $t=2$ 表示 $O(0, 0)$ ，
 L_1 必通過正方形區域
 - 過 $P(-2, 4)$ 平行 $\vec{v}=(1, -1)$ 的直線參數式
 $L_2: \begin{cases} x=-2+t \\ y=4-t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ ，當 $t=2$ 表示點 $(0, 2)$ ，
 L_2 必通過正方形區域
 - 過 $P(-2, 4)$ 平行 $\vec{v}=(0.001, 0)$ 的直線參數式
 $L_3: \begin{cases} x=-2+0.001t \\ y=4 \end{cases} t \in \mathbb{R}$ ，當 $t=2000$ 表示點 $(0, 4)$ ，
 L_3 必通過正方形區域
 - 過 $P(-2, 4)$ 平行 $\vec{v}=(1, 0.499)$ 的直線參數式
 $L_4: \begin{cases} x=-2+t \\ y=4+0.499t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ ，當 $t=2$ 表示點 $(0, 4.998)$ ，
 L_4 必通過正方形區域
 - 過 $P(-2, 4)$ 平行 $\vec{v}=(1, 0.501)$ 的直線參數式
 $L_5: \begin{cases} x=-2+t \\ y=4+0.501t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ ，當 $t=2$ 表示點 $(0, 5.002)$ ，
 L_5 不會通過正方形區域
- 選項(1)(2)(3)(4)正確
<方法二>
點 $P(-2, 4)$ 與 $O(0, 0)$ 的斜率為 -2 ，點 $P(-2, 4)$ 與 $D(0, 5)$
的斜率為 $\frac{1}{2}$ ，只要斜率介於 -2 與 $\frac{1}{2}$ 之間並向右方前進，必可
通過正方形區域。
(1) 恰通過 O 點
(2) 斜率為 -1 且向右下，必通過正方形區域
(3) 斜率為零且向右前進，必通過正方形區域
(4) 斜率小於 $\frac{1}{2}$ 且向右方，必通過正方形區域
(5) 斜率大於 $\frac{1}{2}$ ，不會過正方形區域
選項(1)(2)(3)(4)正確

5.



- $\vec{AB}=(9, 0)$ ， $\vec{AC}=(3, -5)$ ，
三角形面積為 $\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \right| = \frac{45}{2}$
 - $\vec{BC}: 5x-6y=4$ ， $\vec{AC}: 5x+3y=13$ ， $\vec{AB}: y=6$ ，
 $\triangle ABC$ 所圍成的區域（含邊界）為 $\begin{cases} 5x-6y \leq 4 \\ 5x+3y \geq 13 \\ y \leq 6 \end{cases}$
 - $P(1, 3)$ 滿足不等式組 $\begin{cases} 5 \times 1 - 6 \times 3 \leq 4 \\ 5 \times 1 + 3 \times 3 \geq 13 \\ 3 \leq 6 \end{cases}$ ，
所以 P 在可行解區域中
 - $p=-2x+y$ 在可行解區域的頂點位置會產生最大值或
最小值，

(x, y)	$A(-1, 6)$	$B(8, 6)$	$C(2, 1)$
$-2x+y$	8	-10	-3

因為 $-2x+y$ 在 $B(8, 6)$ 有最小值 -10 且直線 $-2x+y=p$
與三邊皆不平行，所以 $-2x+y$ 在 B 點位置產生唯一最小
值
 - $(x-5)^2+(y-1)^2$ 之最小值， (x, y) 為可行解區域的格子
點，只要找靠近 \vec{BC} 的格子點即可，

(x, y)	$(2, 1)$	$(3, 2)$	$(4, 3)$	$(5, 4)$
$(x-5)^2+(y-1)^2$	9	5	5	9
(x, y)	$(6, 5)$	$(7, 6)$	$(8, 6)$	
$(x-5)^2+(y-1)^2$	17	29	34	

可知最小值為 5。
選項(3)(4)(5)正確
6. $\mu_x = \frac{18+20+22+24+26}{5} = 22$ ， $\mu_y = \frac{12+13+11+9+10}{5} = 11$
- $\sigma_x = \sqrt{\frac{(18-22)^2+(20-22)^2+(22-22)^2+(24-22)^2+(26-22)^2}{5}}$
 $= 2\sqrt{2}$
 $\sigma_y = \sqrt{\frac{(12-11)^2+(13-11)^2+(11-11)^2+(9-11)^2+(10-11)^2}{5}}$
 $= \sqrt{2}$
所以 $\sigma_x > \sigma_y$
 - $r = \frac{(18-22)(12-11)+(20-22)(13-11)+(22-22)(11-11)+(24-22)(9-11)+(26-22)(10-11)}{5 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$
 $= -0.8$
 - 因為 $U = -2X - 1$ ， $V = Y + 1$ ，所以 $r_{(U,V)} = -r_{(X,Y)} = 0.8$

(4) Y 對 X 的迴歸直線方程式為

$$y - 11 = (-0.8) \times \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(x - 22) \Rightarrow y = -0.4x + 19.8$$

(5) $X = 25$ 時, $Y = -0.4 \times 25 + 19.8 = 9.8$, 即 9800 箱
選項(3)(5)正確

7. (1) 所求機率為 $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$; 正確

(2) 兄弟隊三勝一敗的機率為 $C_2^3(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27} < 0.3$; 錯誤

(3) 兄弟隊三勝零敗的機率為 $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27} (= \frac{24}{81})$

兄弟隊三勝一敗的機率為 $C_2^3(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27} (= \frac{24}{81})$

兄弟隊三勝二敗的機率為 $C_2^3(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2 = \frac{16}{81}$

兄弟隊獲得挑戰資格的機率為 $\frac{24}{81} + \frac{24}{81} + \frac{16}{81} = \frac{64}{81}$; 正確

(4) 從第三場比賽開始考慮

統一隊一勝零敗的機率為 $\frac{1}{3}$

統一隊一勝一敗的機率為 $C_1^1(\frac{2}{3})(\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$

統一隊一勝兩敗的機率為 $C_2^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3}) = \frac{4}{27}$

所求機率為 $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{19}{27} > 0.7$; 正確

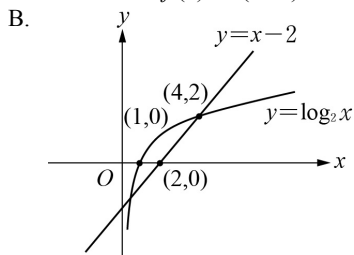
(5) 前四場比賽兄弟隊、統一隊各二勝二敗, 其機率為

$$C_2^4(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{27} < 0.3; \text{錯誤}$$

選項(1)(3)(4)正確

三、選填題

A. $f(3) = f(-1) = 5 \Rightarrow$ 對稱軸 $x = 1$ 且最小值 -3 ,
設 $f(x) = a(x-1)^2 - 3$, 又 $f(3) = a(3-1)^2 - 3 = 5$,
得 $a = 2 \Rightarrow f(5) = 2(5-1)^2 - 3 = 29$



觀察二圖形 $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = \log_2 x \end{cases}$ 恰有 2 個交點,

表示方程式有 2 實根, 所以 $k = 2$

$$\begin{aligned} \text{則 } (\log_8 3)(\log_9 k) &= (\log_8 3)(\log_9 2) = \frac{\log 3}{\log 8} \cdot \frac{\log 2}{\log 9} \\ &= \frac{\log 3}{3 \log 2} \cdot \frac{\log 2}{2 \log 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

C. <方法一>

\therefore 頂點 $A(1, 2)$ 不在 $L: x - 2y + 8 = 0$ 上

則 $A(1, 2)$ 必在另一條對角線 L' 上

設 $L': 2x + y + k = 0$, $A(1, 2)$ 代入得 $k = -4$

$\Rightarrow L': 2x + y - 4 = 0$

由 $\begin{cases} L: x - 2y + 8 = 0 \\ L': 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 正方形中心點 $O(0, 4)$

設 L 上之頂點 $B(x, y)$

$\overrightarrow{OB} = (x, y - 4) \perp \overrightarrow{OA} = (1, -2)$ 且 $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = (x, y - 4) = \pm(2, 1)$

$\Rightarrow L$ 上之兩頂點為 $(2, 5)$ 與 $(-2, 3)$

\therefore 位於第一象限的正方形頂點座標為 $(2, 5)$

<方法二>

設 $A(1, 2)$, 則 $d(A, L) = \frac{|1 - 4 + 8|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$,

設 L 上的頂點 $B(2t - 8, t)$

且 $\overline{AB} = \sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{10} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{(2t - 9)^2 + (t - 2)^2} = \sqrt{10}$,
 $t = 5$ 或 3 (不合) $\therefore B(2, 5)$

第貳部分：非選擇題

一、(1) $X = 4$ 的可能結果為 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$,
發生次數共 $3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 = 10$ 次, (3 分)

$$\Rightarrow P(X = 4) = \frac{10}{6 \times 6} = \frac{5}{18} \text{ (2 分)}$$

(2) 令第一次出現點數為 x , 第二次出現點數為 y , $x + y$ 的可能值為 $2, 3, 4, 5, 6$

X	結果	次數
2	$(1, 1)$	$3 \times 3 = 9$
3	$(1, 2), (2, 1)$	$3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$
4	$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$	$3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 = 10$
5	$(2, 3), (3, 2)$	$2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$
6	$(3, 3)$	$1 \times 1 = 1$

(3 分)

其機率分布如下

X	2	3	4	5	6
P	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

(3 分)

$$E(X) = 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{12}{36} + 4 \cdot \frac{10}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{120}{36} = \frac{10}{3} \text{ (2 分)}$$

二、(1) $\therefore a_1 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{2}{3}$ (1 分)

$n = 2$ 時, $a_2 = a_1 \times \frac{1}{3} + b_1 \times \frac{2}{3}, b_2 = a_1 \times \frac{2}{3} + b_1 \times \frac{1}{3}$, (2 分)

$$\therefore \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ (2 分)}$$

$$(2) \therefore P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}, \text{ (2 分)}$$

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{41}{81} & \frac{40}{81} \\ \frac{40}{81} & \frac{41}{81} \end{bmatrix} \text{ (2 分)}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \end{bmatrix} = P^4 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{41}{81} & \frac{40}{81} \\ \frac{40}{81} & \frac{41}{81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{121}{243} \\ \frac{122}{243} \end{bmatrix} \text{ (3 分)}$$

$$\therefore a_5 = \frac{121}{243} \text{ (1 分)}$$

<方法二>

(2) 前 5 次和為偶數的可能為 1 偶 4 奇, 3 偶 2 奇, 5 偶 0 奇, (2 分)

$$\begin{aligned} a_5 &= C_1^5(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^4 + C_3^5(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2 + C_5^5(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^0 \text{ (4 分)} \\ &= \frac{80}{243} + \frac{40}{243} + \frac{1}{243} = \frac{121}{243} \text{ (2 分)} \end{aligned}$$