國 立 中 壢 高 商 104 學 年 度 第 一 學 期 綜 高 一 年 級 寒 假 作 業

科目：數學科　　　命題範圍：第一冊(全)

班級：　　　　　　考號：　　　　　　姓名：　　　　　　總　分：

一 、單選題

1.(　　) 若不等式 $|x-2|+|5-x|\geq k$ 對所有實數 x 皆成立，則下列 k 值的敘述何者正確？
（A）k 有最大值 7 （B） k 有最小值 3 （C） k 有最大值 3 （D） k 有最小值 7

答案：(C)

解析：由三角不等式知
$|x-2|+|5-x|\geq|(x-2)+(5-x)|=3$
$\therefore$若 $k\leqq 3$，則 $|x-2|+|5-x|\geqq 3\geqq k$ 對所有 x 皆成立
故選(C)

2.(　　) 有關實數的敘述，下列何者正確？ (A)$\sqrt{3}+\sqrt{14}>\sqrt{4}+\sqrt{13}$ (B)兩有理數之間必有一整數
(C)$\sqrt{15}$ 是實數，也是有理數 (D)若 a，b 為實數，$a+b\sqrt{2}=0$，則 $a=b=0$ (E)循環小數為有理數

答案：(E)

解析：(A) ×：$(\sqrt{3}+\sqrt{14})^2=17+2\sqrt{42}$
$(\sqrt{4}+\sqrt{13})^2=17+2\sqrt{52}$
$\therefore \sqrt{4}+\sqrt{13}>\sqrt{3}+\sqrt{14}$
(B) ×：例如 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$ 之間沒有整數
(C) ×：$\sqrt{15}$ 是無理數
(D) ×：例如 $a=2$，$b=-\sqrt{2}$，$a+b\sqrt{2}=0$，但 a，b 不為 0
(E) ○
故選(E)

3.(　　) 當 (x,y) 在直線 $2x+y=3$ 上變動時，關於 $K=9^x+3^y$ 的敘述，試問下列哪個選項是正確的?
(A) K 有最大值 28，最小值 $6\sqrt{3}$ (B) K 有最大值 28，但沒有最小值 (C) K 沒有最大值，但有最小值 12
(D) K 沒有最大值，但有最小值 $6\sqrt{3}$ (E) K 沒有最大值也沒有最小值．

解答 (D)

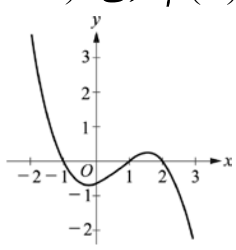
解析 $2x+y=3\Rightarrow y=3-2x$ 代入

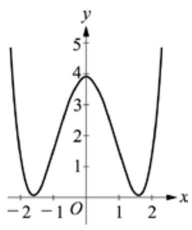
可得 $K=9^x+3^{3-2x}=9^x+\frac{27}{9^x}$ （9^x，$\frac{27}{9^x}>0$）

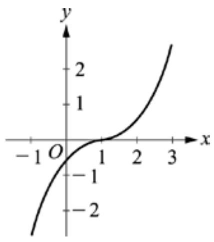
由算幾不等式：$\dfrac{9^x+\frac{27}{9^x}}{2}\geq\sqrt{9^x\cdot\frac{27}{9^x}}\Rightarrow 9^x+\frac{27}{9^x}\geq 6\sqrt{3}$，故 K 有最小值 $6\sqrt{3}$

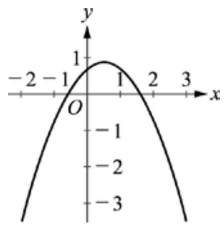
當 x 愈大，9^x 值也愈大，而 3^y 趨近於 0，$K=9^x+3^y$ 也愈大，故 K 無最大值，故選(D)．

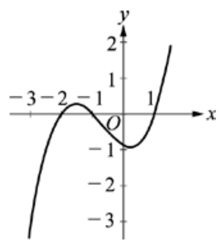
4.(　　) 已知 $f(x)$ 為實係數三次多項式，且 $1+i$ 是 $f(x)=0$ 的一根。下列何者可能是 $y=f(x)$ 概略的圖形？

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


答案：(C)

解析：由實係數多項式方程式虛根成對定理知 $1-i$ 也是根，故 $f(x)=0$ 恰有一實根
即 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸恰有一個交點
因此，$y=f(x)$ 的圖形可能是(C)

5.（　　）試問方程式 $(x^2+x+1)^2+1=0$ 有幾個相異實數解？　（A）0 個　（B）1 個　（C）2 個　（D）3 個　（E）6 個

解答 (A)

解析 $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，恆正（或 $D<0\Rightarrow$ 恆正），

$\therefore (x^2+x+1)^3+1\neq 0$，

故無實數解．

6.（　　）多項式 $f(x)$ 除以 $2x-1$ 的餘式為 3，則 $2\times f(x)$ 除以 $x-\frac{1}{2}$ 的餘式為　（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{3}{2}$　（C）2　（D）3　（E）6

解答 (E)

解析 設 $f(x)=(2x-1)Q(x)+3$，$\therefore 2f(x)=2(2x-1)Q(x)+6=(x-\frac{1}{2})\cdot 4Q(x)+6$，

故選(E)．

7.（　　）已知實係數多項式方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ 的三根相同，請問 b 的值等於下列哪一個選項？
（A）6　（B）8　（C）10　（D）12　（E）14

解答 (D)

解析 設 $x^3+ax^2+bx+8=0$ 的根為 α（三重根），

由根與係數的關係得知 $\begin{cases}\alpha+\alpha+\alpha=\frac{-a}{1}\\ \alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\alpha=\frac{b}{1}\\ \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=\frac{-8}{1}\end{cases}$

$\Rightarrow$ 解得 $\alpha=-2$，$a=6$，$b=12$，

故選(D)．

8.（　　）阿文依據課本綜合除法的書寫方式，求得 $f(x)$ 除以 $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ 的商式為 $Q(x)$，餘數為 -5，其作法如表所列，則商式 $Q(x)$ 中，x 項的係數為（A）8　（B）-8　（C）4　（D）-4　（E）-2

解答 (B)

解析

	2	−1	−8	−8	
		−3	6	3	$-\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	2	−4	−2	−5	
	4	−8	−4		

故選(B)．

9.（　　）設 $a=\sqrt[3]{9}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$，$c=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}$，若 $\frac{ac^2}{b}=3^x$，則 $x=$？　（A）0　（B）1　（C）$\frac{16}{9}$　（D）$\frac{4}{3}$　（E）$\frac{2}{3}$

答案：（D）

解析：$a=\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{6}}=(3^{-1})^{-\frac{5}{6}}=3^{\frac{5}{6}}$，

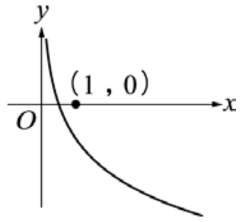
$c=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}=\sqrt[4]{(3^{-1})^{-3}}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$

$\therefore \frac{ac^2}{b}=\frac{3^{\frac{2}{3}}\cdot(3^{\frac{3}{4}})^2}{3^{\frac{5}{6}}}=\frac{3^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}}{3^{\frac{5}{6}}}=\frac{3^{\frac{13}{6}}}{3^{\frac{5}{6}}}=3^{\frac{13}{6}-\frac{5}{6}}=3^{\frac{8}{6}}=3^{\frac{4}{3}}=3^x$

$\therefore x=\frac{4}{3}$

故選（D）

10.（　　）下圖為 $y=a+\log_b x$ 之部分圖形，則下列敘述何者正確？



（A） $a<0$，$b>1$（B） $a>0$，$b>1$ （C） $a=0$，$b>1$ （D） $a>0$，$0<b<1$ （E）$a<0$，$0<b<1$

答案：(E)

解析：①∵函數為嚴格遞減函數　∴$0<b<1$
②$y=a+\log_b x$，令 $x=1$　∴$y=a<0$
故選(E)

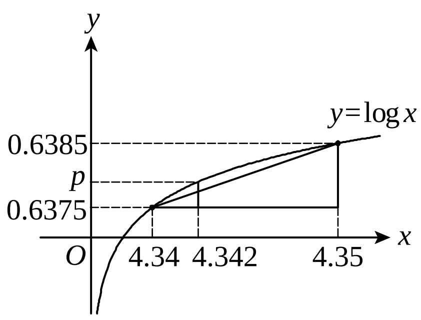
11.（　　）數學教科書所附的對數表中，$\log 4.34=0.6375$、$\log 4.35=0.6385$，根據 $\log 4.34$ 和 $\log 4.35$ 的查表值以內插法求 $\log 4.342$，設求得的值為 p，則下列哪一個選項是正確的?

（A） $p=\frac{1}{2}(0.6375+0.6385)$ （B） $p=0.2\times0.6375+0.8\times0.6385$ （C） $p=0.8\times0.6375+0.2\times0.6385$

（D） $p=0.6375+0.002$ （E） $p=0.6385-0.002$

解答 (C)

解析 如下圖所示，



$$\frac{p-0.6375}{0.6385-0.6375}=\frac{4.342-4.34}{4.35-4.34}$$

$\Rightarrow p=0.6375+0.2(0.6385-0.6375)=0.8\times0.6375+0.2\times0.6385$

12.（　　）若正實數 x、y 滿足 $\log x=2.8$，$\log y=5.6$，則 $\log\left(x^2+y\right)$ 最接近下列哪一個選項的值?
（A）2.8 （B）5.6 （C）5.9 （D）8.4 （E）11.2

解答 (C)

解析 $\log_{10}x=2.8 \quad\Rightarrow\quad x=10^{2.8}$，$x^2=(10^{2.8})^2=10^{5.6}$
$\log_{10}y=5.6 \quad\Rightarrow\quad y=10^{5.6}$
$\therefore\quad \log_{10}(x^2+y)=\log_{10}(10^{5.6}+10^{5.6})=\log_{10}(10^{5.6}\times2)$
$=5.6+\log_{10}2=5.6+0.301=5.901$
故選(C)

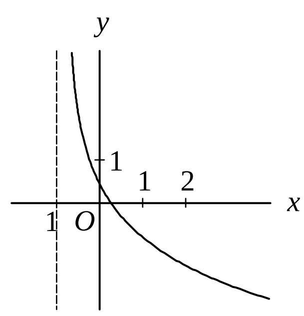
13.（　　）令 $a=2.6^{10}-2.6^9$，$b=2.6^{11}-2.6^{10}$，$c=\dfrac{2.6^{11}-2.6^9}{2}$．請選出正確的大小關係．

（A） $a>b>c$ （B） $a>c>b$ （C） $b>a>c$ （D）$b>c>a$ （E）$c>b>a$

解答 (D)

解析 因為
$a=2.6^9(2.6-1)=2.6^9\times1.6$，
$b=2.6^9(2.6^2-2.6)=2.6^9\times4.16$，
$c=2.6^9(\frac{2.6^2-1}{2})=2.6^9\times2.88$，
所以 $b>c>a$．故選(D)．

14.（　　）函數 $y=a+\log_b(x+c)$ 之圖形，如圖所示，$x=-1$ 為其漸近線，下列何者正確?
（A）$a>0$，$0<b<1$，$c>0$ （B）$a>0$，$0<b<1$，$c<0$
（C）$a>0$，$b>1$，$c>0$ （D）$a>0$，$b>1$，$c<0$
（E） $a<0$，$0<b<1$，$c>0$



解答 (E)

解析 由圖形知：$0<b<1$，$a<0$，$c>0$，故選(E)．

15. (　　) 若 $x=\dfrac{\sqrt[3]{88.3}}{\sqrt{2.56}}$，則下列哪一個敘述是正確的?

(A) $2.8<x<2.9$　(B) $2.7<x<2.8$　(C) $2.6<x<2.7$　(D) $2.5<x<2.6$　(E) $2.4<x<2.5$

($\log 8.83\approx 0.9460$， $\log 1.6\approx 0.2041$， $\log 2.4\approx 0.3802$， $\log 2.5\approx 0.3979$，
$\log 2.6\approx 0.4150$， $\log 2.7\approx 0.4314$， $\log 2.8\approx 0.4472$， $\log 2.9\approx 0.4624$)

解答 (B)

解析 $\log x=\log\dfrac{\sqrt[3]{88.3}}{\sqrt{2.56}}=\dfrac{1}{3}\log 88.3-\log 1.6\approx\dfrac{1}{3}\times 1.946-0.2041\approx 0.4446$

又 $\log 2.7\approx 0.4314$，$\log 2.8\approx 0.4472$

$\Rightarrow 2.7<x<2.8$．

二、多重選擇題

1. (　　　)下列哪些有理數可化為有限小數？ (A)$\dfrac{41}{16}$ (B)$\dfrac{139}{15}$ (C)$\dfrac{3}{50}$ (D)$\dfrac{27}{128}$ (E)$\dfrac{27}{15}$。

答案：(A)(C)(D)(E)

解析：最簡分數 $\dfrac{m}{n}$，若 n 只有 2，5 的質因數，則 $\dfrac{m}{n}$ 為有限小數，不然就是循環小數

(A) ○：$16=2^4$，故 $\dfrac{41}{16}$ 為有限小數

(B) ×：$15=3\times 5$，故 $\dfrac{139}{15}$ 為循環小數

(C) ○：$50=2\times 5^2$，故 $\dfrac{3}{50}$ 為有限小數

(D) ○：$128=2^7$，故 $\dfrac{27}{128}$ 為有限小數

(E) ○：$\dfrac{27}{15}=\dfrac{9}{5}$ 為有限小數

故選(A)(C)(D)(E)

2. (　　　)下列哪些數是無理數？ (A)$\sqrt{16}$ (B)$\sqrt{25}$ (C)π（圓周率） (D)$\sqrt{8}$ (E)$2+\sqrt{3}$。

答案：(C)(D)(E)；

解析：(A) ×：$\sqrt{16}=4$ 是有理數

(B) ×：$\sqrt{25}=5$ 是有理數

(C) ○：π 是無理數

(D) ○：$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 是無理數

(E) ○：$2+\sqrt{3}$ 是無理數

故選(C)(D)(E)

3. (　　　)有關有理數、無理數的運算性質，下列哪些選項正確？

(A)若 a 是有理數，b 是無理數，則 $a\times b$ 是無理數

(B)若 $3a+2b$ 是有理數且 a 是無理數，則 b 必為無理數

(C)若 a，b，$\dfrac{a}{b}$ 都是無理數，則 $a\times b$ 必為無理數

(D)若 a^3，a^5 都是有理數，則 a 是有理數

(E)若 a^2，a^4 都是有理數，則 a 是有理數

答案：(B)(D)

(A) ×：反例，$0\times\sqrt{3}=0$

(B) ○：令 $3a+2b=c$（有理數）　$\therefore 2b=-3a+c$（無理數）

(C) ×：反例，$a=2+\sqrt{3}$，$b=2-\sqrt{3}$，$a\times b=1$

(D) ○：$\dfrac{a^5}{a^3}=a^2$（有理數），$\dfrac{a^3}{a^2}=a$（有理數）

(E) ×：反例，$a=\sqrt{2}$，$a^2=2$，$a^4=4$

故選(B)(D)

4. (　　　)下列各數哪些介在整數 1 和 2 之間？ (A)$\sqrt{\dfrac{22}{7}}$ (B)$1.\overline{36}$ (C)$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ (D)$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (E)$1.\overline{9}$

答案：(A)(B)(D)

解析：(A) ○：$\because 1<\dfrac{22}{7}<4$ $\therefore 1<\sqrt{\dfrac{22}{7}}<2$

(B) ○：$1<1.\overline{36}<2$

(C) ×：$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<1$

(D) ○：因為 $1<\sqrt{3}<2$，$3<2+\sqrt{3}<4$，所以 $1<\sqrt{2}+\sqrt{3}<2$

(E) ×：$1.\overline{9}=2$

故選(A)(B)(D)

5. (　　　)已知 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 為三次實係數多項式且 $f(i-2)=0$，則下列哪些選項是正確的？

(A) $f(i+2)=0$ (B) $f(x)=0$ 只有一個實根 (C)若 $\dfrac{b}{a}$ 為方程式 $f(x)=0$ 的有理根，則 $a|a_3$ 且 $b|a_0$

(D) $f(i)=1-i$，則 $f(i^3)=1-i$ (E)若 $f(2)f(3)>0$，則 $f(x)=0$ 在 2、3 間沒有實根

答案：(B)(E)

解析：(A) ×：虛根為 $i-2$，$-i-2$ $\therefore f(i+2)\neq 0$

(B) ○

(C) ×：a_3，a_0 不一定是整數

(D) ×：$f(i^3)=f(-i)=f(\bar{i})=\overline{f(i)}=\overline{1-i}=1+i$

(E) ○：若 2，3 之間有實根，必成對

故選(B)(E)

6. (　　　)設 $f(x)=2x^3+bx^2+cx+5$ 為實係數多項式，且已知 $-1+2i$ 為 $f(x)=0$ 之一根，則下列敘述哪些正確？

(A) $f(1+2i)=0$ (B) x^2+2x+5 為 $f(x)$ 的因式 (C) $f(-1)f(-2)>0$

(D) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸恰有一個交點 (E) $y=f(x)$ 與 $y=x$ 的圖形恰有三個交點。

答案：(B)(C)(D)

解析：(A) ×：$\because f(x)=0$ 為實係數方程式且 $f(-1+2i)=0$

$\therefore f(-1-2i)=0$

(B) ○：由題意知 $f(x)=[x-(-1+2i)][x-(-1-2i)]\cdot Q(x)=(x^2+2x+5)\cdot Q(x)$

即 (x^2+2x+5) 為 $f(x)$ 之因式

(C) ○：由長除法可知 $f(x)=(x^2+2x+5)(2x+1)$

$\therefore f(-1)\cdot f(-2)>0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x & & & +1 \\ \hline
x^2+2x+5 & 2x^3+ & bx^2 & +\ cx & +5 \\
 & 2x^3+ & 4x^2 & +\ 10x & \\ \hline
 & & (b-4)x^2 & +(c-10)x & +5 \\
 & & x^2 & +\ 2x & +5 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

(D) ○：承(C)，$f(x)=0$ 恰有一實根

$\therefore y=f(x)$ 與 x 軸恰有一交點

(E) ×：令 $f(x)=x$，即 $(x^2+2x+5)(2x+1)-x=0$

令 $h(x)=(x^2+2x+5)(2x+1)-x$

x	……	-2	-1	0	1	2	3	……
$h(x)$	……	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	……

$\therefore h(x)=0$ 在 $(-1，0)$ 之間恰有一實根

即 $y=f(x)$ 與 $y=x$ 恰有一交點

故選(B)(C)(D)

7. (　　　)設 $f(x)$，$g(x)$ 均為次數大於 2 的實係數多項式，且 $f(x)=g(x)(x^2+x-2)+4x-1$，則下列敘述哪些正確？
（A） $\deg(f(x)+g(x))>\deg f(x)$　（B） $f(x)$ 除以 $x+2$ 所得之餘式為 -9
（C） $x-1$ 是 $f(x)-3$ 的因式　（D） $f(x)$ 除以 $(x+3)(x^2+x-2)$ 所得之餘式為 $4x-1$
（E） $f(x)$ 除以 $2x^2+2x-4$ 所得商式為 $\frac{1}{2}g(x)$，餘式為 $4x-1$

答案：(B)(C)(E)

解析：（A）×：$\deg(f(x)+g(x))=\deg f(x)$
（B）○：$f(x)=g(x)(x+2)(x-1)+4(x+2)-9$
$=(x+2)[g(x)(x-1)+4]-9$
∴餘式為 -9
（C）○：$f(x)-3=g(x)(x^2+x-2)+4x-4$
$=g(x)(x+2)(x-1)+4(x-1)$
$=(x-1)[g(x)(x+2)+4]$
∴$x-1$ 是 $f(x)-3$ 的因式
（D）×：∵$g(x)\div(x+3)$ 可能無法整除會產生餘式
（E）○：$f(x)=g(x)\cdot(x^2+x-2)+4x-1$
$=g(x)\cdot\frac{1}{2}(2x^2+2x-4)+4x-1$
⇒商式為 $\frac{1}{2}g(x)$，餘式為 $4x-1$
故選(B)(C)(E)

8. (　　　)設整係數三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $f(2+i)=0$，其中 $i^2=-1$，請問下列哪些選項是正確的？
（A） $a(2-i)^3+b(2-i)^2+c(2-i)+d=0$　（B） $y=f(x)$ 的圖形恆在 x 軸上方
（C） $a+b+c+d$ 一定是偶數　（D）方程式 $f(x)=0$ 的實根一定是有理數
（E）若 $f(2010)=0$，則方程式 $f(x^{99})=0$ 恰有2個相異的正實根

解答　(A)(C)(D)

解析　(1)虛根成對
(2)不一定在x軸上方
(5)$f(x)=[x-(2+i)][x-(2-i)](x-2010)=(x^2-4x+5)(x-2010)$
$\deg[f(x^{99})]=297$，奇次方程式，只保證至少有一實根
故選(A)(C)(D)．

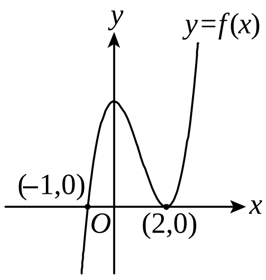
9. (　　　)設下列哪些函數為奇函數?　（A） $y=3x+1$　（B） $y=x^2+|x|$　（C） $y=x^5+x$　（D） $y=(x+1)^3$

解答　(C)

解析　當$f(a)=-f(-a)$時，函數為奇函數，
(1)$f(a)=3a+1\neq -f(-a)=3a-1$，非為奇函數
(2)$f(a)=a^2+|a|\neq -f(-a)=-a^2-|a|$，非為奇函數
(3)$f(a)=a^5+a=-f(-a)=a^5+a$，為奇函數
(4)$f(a)=(a-1)^3\neq -f(-a)=(a+1)^3$，非為奇函數
故選(C)．

10. (　　　)已知實係數多項式函數 $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 的圖形與 x 軸恰交於 $(-1,0)$、$(2,0)$ 兩點，如圖所示．
下列敘述何者正確?（A） $a>0$（B） $e>0$　（C） $a+b+c+d+e<0$
（D）方程式 $f(x)=0$ 有二實根、二共軛虛根　（E）不等式 $f(x)<0$ 的解為 $x<-1$

解答　(B)(E)



解析　(1)$a=0$
(2)與 y 軸交於$(0,e)$　∴$e>0$
(3)$f(1)=a+b+c+d+e>0$
(4)為三實根
(5)由圖可知
故選(B)(E)

11. (　　　)設 a 是不為 1 的正數，下列哪些性質是指數函數 $f(x)=a^x$ 的特性？

(A)函數圖形通過點(0，1)　(B)是一遞增函數　(C)函數 $f(x)=a^x$ 與 $f(x)=a^{-x}$ 的圖形對稱於 y 軸

(D)函數圖形與任一水平線 $y=k$ 都有一交點　(E)函數圖形與任一鉛垂線 $x=h$ 都有一交點

答案：(A)(C)(E)

解析：(A)○：a 不為 0，規定 $a^0=1$，故過點(0，1)

(B)×：$0<a<1$ 時，$f(x)=a^x$ 為遞減函數

$a>1$ 時，$f(x)=a^x$ 為遞增函數

(C)○：設 $P(x_0，y_0)$ 在 $f(x)=a^x$ 的圖形上

得 $y_0=a^{x_0}=a^{-(-x_0)}$

因而 $Q(-x_0，y_0)$ 在 $f(x)=a^{-x}$ 的圖形上，故兩函數的圖形對稱於 y 軸

(D)×：a 為正數，指數 a^x 的函數值恆為正，故當 $k\leqq 0$ 時，$y=k$ 與 $f(x)=a^x$ 的圖形沒有交點

(E)○：指數函數 $f(x)=a^x$ 的定義域為所有實數，故對於任一 $x=h$ 而言，都有一個相對應的函數值

故選(A)(C)(E)

12. (　　　)某物理學家在計算繁雜的數值 a，b，c，d，e 時，以某數為底數，將這五個數分別取對數，結果得到 5.5，7.5，13，18.5，26 這五個對數值。則下列選項哪些是正確的？

(A) $c=a+b$　(B) $c=ab$　(C) $d=a^2b$　(D) $e^2=c$

答案：(B)(C)

解析：令底數為 α，由題意知 $5.5=\log_\alpha a$，$7.5=\log_\alpha b$，

$13=\log_\alpha c$，$18.5=\log_\alpha d$，$26=\log_\alpha e$

則 $\log_\alpha c=13=5.5+7.5=\log_\alpha a+\log_\alpha b=\log_\alpha ab$，即 $c=ab$

$\log_\alpha d=18.5=5.5+5.5+7.5=2\log_\alpha a+\log_\alpha b=\log_\alpha a^2b$

則 $d=a^2b$

$\log_\alpha e=26=2\times 13=2\log_\alpha c=\log_\alpha c^2$，即 $e=c^2$

故選(B)(C)

13. (　　　)設 $0<x<1$，請選出正確的選項：　(A) $x^2<\sqrt{x}<x$　(B) $\log_{10}(x^2)<\log_{10}x<\log_{10}\sqrt{x}$

(C) $\log_2(x^2)<\log_{10}(x^2)<\log_2 x$　(D) $\log_{10}(x^2)<\log_2\sqrt{x}<\log_{10}x$

解答　(B)(D)

解析　(1)錯誤，取 $x=0.01\Rightarrow 0.01^2<0.01<\sqrt{0.01}$，故不正確

(2)當 $0<x<1$，$x-x^2=x(1-x)>0$，故 $x>x^2$

$\sqrt{x}-x=x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}})>0$，故 $\sqrt{x}>x$，推得 $x^2<x<\sqrt{x}$

$\Rightarrow \log_{10}(x^2)<\log_{10}x<\log_{10}\sqrt{x}$ 恆成立

(3)錯誤，取 $x=\frac{1}{2}\Rightarrow \log_2\frac{1}{2}=-1$，$\log_{10}(\frac{1}{2})^2=-2\log_{10}2=-0.602$　$\Rightarrow \log_{10}(\frac{1}{2})^2>\log_2\frac{1}{2}$，故不正確

(4)因為 $\sqrt{10}<4<10\Rightarrow \log_x\sqrt{10}>\log_x 4>\log_x 10\Rightarrow \log_{\sqrt{10}}x<\log_4 x<\log_{10}x$　即 $\log_{10}(x^2)<\log_2\sqrt{x}<\log_{10}x$

故選(B)(D)．

14. (　　　)設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$，試問下列哪些選項是正確的?

(A)若 $f(3)=6$，則 $g(36)=6$　(B) $\frac{f(238)}{f(219)}=\frac{f(38)}{f(19)}$　(C) $g(238)-g(219)=g(38)-g(19)$

(D)若 P，Q 為 $y=g(x)$ 的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必為正數

(E)若直線 $y=5x$ 與 $y=f(x)$ 圖形有兩個交點，則直線 $y=\frac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$ 的圖形也有兩個交點．

解答　(A)(B)(D)(E)

解析　$f(x)$與$g(x)$互為反函數

(1)○：$f(3)=6$，則$g(6)=3\Rightarrow \log_a 6=3$

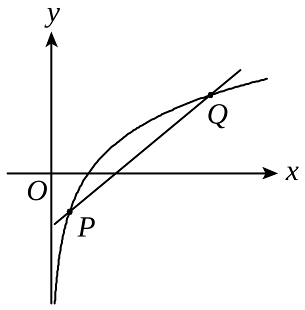
$g(36)=\log_a 36=2\log_a 6=2\times 3=6$．

(2)○：$\frac{f(238)}{f(219)}=\frac{a^{238}}{a^{219}}=a^{19}$

$\frac{f(38)}{f(19)}=\frac{a^{38}}{a^{19}}=a^{19}$．

(3)×：$g(238)-g(219)=\log_a 238-\log_a 219=\log_a\frac{238}{219}$　$g(38)-g(19)=\log_a 38-\log_a 19=\log_a\frac{38}{19}=\log_a 2$．

(4)○：如圖．



(5)○：$y=5x$對稱於$x=y$之直線為$y=\frac{1}{5}x$

∴與$y=g(x)$也有兩個交點．

三、填充題

1. 設 x 為實數，則$|x-1|+|x+7|$的最小值為【　　　】，此時x之解為【　　　】。

答案：8；$-7\leqq x\leqq 1$

解析：由三角不等式得知

$|x-1|+|x+7|\geqq|-7-1|=8$

∴最小值 8，此時$-7\leqq x\leqq 1$

2. 設 a，b 為有理數，且滿足$a\sqrt{3-2\sqrt{2}}+b\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{43-30\sqrt{2}}$，則 $a=$【　　　】，$b=$【　　　】。

答案：1；2

解析：$\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}=\sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{8})^2}=3-2\sqrt{2}$

$\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{43-2\sqrt{450}}=\sqrt{(\sqrt{25}-\sqrt{18})^2}=5-3\sqrt{2}$

$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$

$a(\sqrt{2}-1)+b(3-2\sqrt{2})=5-3\sqrt{2}$

$\Rightarrow(-a+3b-5)+(a-2b+3)\sqrt{2}=0$

∵a，b 是有理數　∴$-a+3b-5=0$ 且 $a-2b+3=0$

$\Rightarrow a=1$，$b=2$

3. 設 x，y 為實數，$|x+1|\leq 3$，$|y-3|\leq 3$，則：

（1）$-2x+3y$的最大值為【　　　】，最小值為【　　　】。

（2）xy的最大值為【　　　】，最小值為【　　　】。

（3）$xy+x-y-2$ 的最大值為【　　　】，最小值為【　　　】。

答案：（1）26；-4；（2）12；-24；（3）6；-36

解析：$|x+1|\leqq 3\Rightarrow -3\leqq x+1\leqq 3$　∴$-4\leqq x\leqq 2$

$|y-3|\leqq 3\Rightarrow -3\leqq y-3\leqq 3$　∴$0\leqq y\leqq 6$

（1）$-4\leqq -2x\leqq 8$……………①

$0\leqq 3y\leqq 18$ ………………②

∴①＋②得$-4\leqq -2x+3y\leqq 26$

（2）$-24\leqq xy\leqq 12$

（3）$xy+x-y-2=(x-1)(y+1)-1$

又$-5\leqq x-1\leqq 1$，$1\leqq y+1\leqq 7$

$\Rightarrow -35\leqq(x-1)(y+1)\leqq 7$

$\Rightarrow -36\leqq(x-1)(y+1)-1\leqq 6$

4. 不等式$4<|2-3x|\leq 16$之解為【　　　】。

答案：$-\frac{14}{3}\leqq x<-\frac{2}{3}$或$2<x\leqq 6$

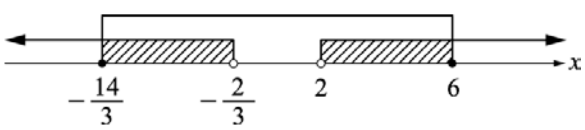
解析：（1）$|2-3x|\leqq 16\Rightarrow -16\leqq 3x-2\leqq 16$

$\Rightarrow -\frac{14}{3}\leqq x\leqq 6$

（2）$4<|2-3x|\Rightarrow 2-3x>4$ 或 $2-3x<-4$

$\Rightarrow x<-\frac{2}{3}$或$x>2$

∴$-\frac{14}{3}\leqq x<-\frac{2}{3}$或$2<x\leqq 6$



5. 設 $x>0$，$y>0$，且 $2x+3y=12$，試求：

（1） xy 之最大值為【　　　】。

（2）產生最大值時，數對 $(x,y)=$【　　　】。

答案：（1）6；（2）（3，2）

解析：（1）由算幾不等式：

$$\frac{2x+3y}{2}\geqq\sqrt{(2x)(3y)}\Rightarrow\frac{12}{2}\geqq\sqrt{6xy}$$

$\Rightarrow xy\leqq 6$　∴xy 的最大值為 6

（2）此時 $2x=3y=6\Rightarrow x=3$，$y=2$

∴數對（x，y）＝（3，2）

6. 設 $\sqrt{28}$ 的小數部分為 k，將 $\sqrt{3-k}$ 化為 $\sqrt{a}-b$ 的形式，若 a，b 為整數，則 $a+b$ ＝【　　　】.

解答 8

解析 $k=\sqrt{28}-5=-5+2\sqrt{7}\Rightarrow\sqrt{3-k}=\sqrt{8-2\sqrt{7}}=\sqrt{7}-1$，

∴$a=7$，$b=1$，$a+b=8$

7. (1)設 $P=\sqrt{10+\sqrt{37}}$，試問最接近 P 的整數為【　　　】.

(2)已知 k 為正整數，且滿足 $\frac{k}{11}<\sqrt{5}<\frac{k+1}{11}$，試問 k 值為【　　　】

解答 (1)4;(2)24

解析 (1) $P=\sqrt{10+\sqrt{37}}\approx\sqrt{10+\sqrt{36}}=\sqrt{10+6}=4$.

(2) $\frac{k}{11}<\sqrt{5}<\frac{k+1}{11}\Rightarrow k<11\sqrt{5}<k+1\Rightarrow k^2<605<(k+1)^2\Rightarrow k=24$

8. 設 k 為實數，若不論 x 為任意實數，二次函數 kx^2+2x-2 的值恆小於 2，求 k 之解為【　　　】。

答案：$k<-\frac{1}{4}$

解析：由題意知 $kx^2+2x-2<2\Rightarrow kx^2+2x-4<0$ 恆成立

∴（1）$k<0$……………①

（2）$2^2-4\times k\times(-4)<0\Rightarrow k<-\frac{1}{4}$……………②

由①、②得 $k<-\frac{1}{4}$

9. 設 $f(x)=x^4-3ax^2+bx+4$ 含有 $x+1$ 及 $x-2$ 之因式，則 $a=$【　　　】，$b=$【　　　】。

答案：$\frac{5}{3}$；0；

解析：　由題意知

$f(-1)=0\Rightarrow 1-3a-b+4=0$

∴$3a+b=5$ ………………①

$f(2)=0\Rightarrow 16-12a+2b+4=0$

∴$12a-2b=20$……………②

解①、②得 $a=\frac{5}{3}$，$b=0$

10. 設 a，b，c 都是自然數且 $a>b>c$，若 $x-c$ 為 $x(x-a)(x-b)-3$ 之因式，則 $a+b+c=$【　　　】。

答案：7；

解析：由因式定理得 $c(c-a)(c-b)=3$

∵$a>b>c$

∴

c	1
$c-a$	-3
$c-b$	-1

∴$a=4$，$b=2$，$c=1$

故 $a+b+c=7$

11. 設 $f(x)$ 為三次多項式且 $f(2)=f(-1)=f(4)=3$，$f(1)=-9$，則 $f(x)=$【　　　】。

答案：$-2x^3+10x^2-4x-13$

解析：由題意知 $f(x)-3$ 含有 $x-2$，$x+1$，$x-4$ 之因式

∴令 $f(x)=a(x-2)(x+1)(x-4)+3$

又 $f(1)=6a+3=-9$　∴$a=-2$

即 $f(x)=-2(x-2)(x+1)(x-4)+3$

$=-2x^3+10x^2-4x-13$

12. 方程式 $2x^2+(7-5i)x+1-3i=0$ 的兩根為 α，β，則 $\alpha+\beta=$【　　　　】，$\alpha\beta=$【　　　　】。

答案：$\dfrac{-7+5i}{2}$；$\dfrac{1-3i}{2}$

解析：根與係數的關係同樣滿足複係數方程式

$$\therefore \alpha+\beta=-\frac{7-5i}{2}=\frac{-7+5i}{2}$$

$$\alpha\beta=\frac{1-3i}{2}$$

13. 設 a 為實數，若方程式 $3x^2+(a+i)x+(2i-6)=0$ 有實根，則 $a=$【　　　　】，兩根為【　　　　】。

答案：3；-2，$\dfrac{3-i}{3}$

利用複數相等的性質解之

①設實根為 t

$\therefore 3t^2+(a+i)t+(2i-6)=0$

$\Rightarrow (3t^2+at-6)+(t+2)i=0$

$\therefore 3t^2+at-6=0$ 且 $t+2=0$

$\Rightarrow t=-2$ 且 $a=3$

故原方程式為 $3x^2+(3+i)x+(2i-6)=0$

②設另一根為 k

則由根與係數得 $-2+k=-\dfrac{3+i}{3}$

$\therefore k=2-\dfrac{3+i}{3}=\dfrac{3-i}{3}$，故兩根為 -2，$\dfrac{3-i}{3}$

14. 設 a 是實數且不等式 $\dfrac{ax-1}{3}-\dfrac{4x+5}{5}+2<0$ 的解為 $x>5$，則 $a=$【　　　　】。

答案：2

解析：原式化為 $5(ax-1)-3(4x+5)+30<0$

$\Rightarrow (5a-12)x+10<0$，此不等式與 $x>5$ 同義

即 $(5a-12)x+10<0$ 與 $-x+5<0$ 同義

$\therefore \dfrac{5a-12}{-1}=\dfrac{10}{5}\Rightarrow a=2$

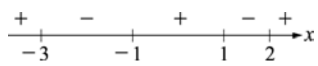
15. 分式不等式 $\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)}<0$ 之解為【　　　　】。

答案：$-3<x<-1$ 或 $1<x<2$；

解析：$\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-1)}<0$

$\Rightarrow (x+3)(x-2)(x+1)(x-1)<0$

$\Rightarrow -3<x<-1$ 或 $1<x<2$



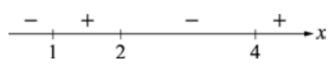
16. 分式不等式 $\dfrac{x^2-3x+2}{x-4}\geqq 0$ 之解為【　　　　】。

答案：$1\leqq x\leqq 2$ 或 $x>4$

解析：$\dfrac{x^2-3x+2}{x-4}\geqq 0\Rightarrow (x^2-3x+2)(x-4)\geqq 0$ 且 $x\neq 4$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-4)\geqq 0$ 且 $x\neq 4$

$\therefore 1\leqq x\leqq 2$ 或 $x>4$



17. 設 a，b 為實數，$\dfrac{2a+i}{4+3i}$ 的共軛複數為 $-5+bi$，則 $a+b=$【　　　　】

解答　-20

解析　$\left(\overline{\dfrac{2a+i}{4+3i}}\right)=\dfrac{2a-i}{4-3i}=\dfrac{(8a+3)+(6a-4)i}{25}$

$$\therefore \begin{cases}\dfrac{8a+3}{25}=-5\\ \dfrac{6a-4}{25}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-16\\ b=-4\end{cases}$$

故 $a+b=(-16)+(-4)=-20$．

18. 設 $f(x)$ 為一多項式,若多項式 $(x-1)\cdot f(x)$ 除以 x^2+x+2 的餘式為 $3x-7$,試求多項式 $f(x)$ 除以 x^2+x+2 的餘式為【　　　】

解答　$x+5$

解析　$f(x)=(x^2+x+2)Q(x)+(ax+b)$

$(x-1)f(x)=(x-1)(x^2+x+2)Q(x)+(ax+b)(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x+2)Q(x)+a(x^2+x+2)+(-2a+b)x+(-b-2a)$

$$\begin{cases}-2a+b=3\\-2a-b=-7\end{cases}$$

$\Rightarrow a=1$, $b=5$

$\therefore$餘式 $x+5$.

19. 設 $a>0$，$f(x)=a^x$，對任意實數 x，若 x 增加 4 時，$f(x)$ 的值變為原來的 $\frac{1}{16}$ 倍，則 $a=$【　　　】。

答案：$\frac{1}{2}$

解析：由題意知 $f(x+4)=\frac{1}{16}f(x)$

$\therefore a^{x+4}=\frac{1}{16}a^x\Rightarrow a^4\times a^x=\frac{1}{16}a^x$

$\therefore a^4=\frac{1}{16}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$（$\because a>0$）

20. 不等式 $\log_2(x-1)>1+\log_4(x^2-3x+2)$ 之解為【　　　】。

答案：$2<x<\frac{7}{3}$

解析：原式 $\Rightarrow\log_4(x-1)^2>\log_4 4+\log_4(x^2-3x+2)$

$\Rightarrow\log_4(x-1)^2>\log_4[4(x^2-3x+2)]$

$\Rightarrow(x-1)^2>4(x^2-3x+2)$

$\Rightarrow x^2-2x+1>4x^2-12x+8$

$\Rightarrow 3x^2-10x+7<0\Rightarrow(x-1)(3x-7)<0$

$\Rightarrow 1<x<\frac{7}{3}$……………①

但真數恆正，即 $x-1>0$ 且 $x^2-3x+2>0$

$\Rightarrow x>2$…………………………②

由①、②得 $2<x<\frac{7}{3}$

21. 已知 $10^{0.9422}=8.754$, $10^{2.9442}=879.4$, 若 $10^x=87.78$, 求 x 的近似值為【　　　】(至小數點後第四位).

解答　1.9434

解析　$10^{0.9422}=8.754\Rightarrow 10^{1.9422}=87.54$

$10^{2.9442}=879.4\Rightarrow 10^{1.9442}=87.94$

$$\begin{cases}10^{1.9422}=87.54\\10^x=87.78\\10^{1.9442}=87.94\end{cases}\Rightarrow\frac{x-1.9422}{1.9442-1.9422}=\frac{87.78-87.54}{87.94-87.54}\Rightarrow x=1.9434$$

22. 設年利率為 12.5%，若依複利計算，則至少要【　　　】年（取整數年數），本利和才會超過本金的 2 倍 .
($\log_{10}2=0.301$, $\log_{10}3=0.4771$)

解答　6

解析　依題意：$P(1+12.5\%)^n>2P$

$\Rightarrow(1.125)^n>2\Rightarrow\log(\frac{1125}{1000})^n>\log 2$

$\Rightarrow n(3\log 5+2\log 3-3)>\log 2$

$\Rightarrow n(3\times 0.6990+2\times 0.4771-3)>0.3010$

$\Rightarrow n>\frac{0.3010}{0.0512}\fallingdotseq 5.88$

$\Rightarrow n\geq 6$

$\therefore$至少要 6 年 .

23. 已知$0<a<1$且$a^{2x}+a^{x}-2\le 0$，求x的範圍為【　　　　　】

解答 $x\ge 0$

解析 令$t=a^x$，原式$\Rightarrow t^2+t-2\le 0\Rightarrow (t+2)(t-1)\le 0\Rightarrow -2\le t\le 1$

又$t=a^x>0$，$\therefore 0<t\le 1$，即$0<a^x\le 1\Rightarrow 0<a^x\le a^0$

又$0<a<1$，$\therefore x\ge 0$．

24. 某公司為了響應節能減碳政策，決定在五年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的75%．公司希望每年依固定的比率（當年和前一年排放量的比）逐年減少二氧化碳的排放量．若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少【　　　　　】%的二氧化碳的排放量．(計算到小數點第一位，以下四捨五入．)

解答 5.6

解析 設$\dfrac{\text{當年排放量}}{\text{前一年排放量}}=x$

則$x^5=75\%=\dfrac{75}{100}=\dfrac{3}{4}$

$\log x^5=\log\dfrac{3}{4}$

$5\log x=\log 3-\log 4$

$\log x=\dfrac{0.4771-0.6020}{5}=-0.02498$

$\log x=-1+0.97502=-1+\log 9.44$

$x=0.944=94.4\%$

$\therefore$所求$=1-x=5.6\%$．

25. 化簡：$6(2^{-\log_2 6})+\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{9}+3^{2+\log_9 25}=$【　　　　　】

解答 45

解析 原式$=6\times 2^{\log_2 6^{-1}}+\dfrac{1}{2}\log_3 3^{-2}+3^{2+\log_3 5}=6\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\times(-2)+3^2\times 5=45$

26. 設實數x滿足$0<x<1$，且$\log_x 4-\log_2 x=1$，則$x=$【　　　　　】(化成最簡分數)

解答 $\dfrac{1}{4}$

解析 令$t=\log_2 x$，則$\log_x 4=2\log_x 2=\dfrac{2}{t}$

原式$\Rightarrow\dfrac{2}{t}-t=1\Rightarrow t^2+t-2=0\Rightarrow (t+2)(t-1)=0\Rightarrow t=-2$或$t=1$

即$\log_2 x=-2$或$\log_2 x=1$

故$x=\dfrac{1}{4}$或$x=2$（不合）．