

108 學年度全國高級中學
學科能力測驗模擬考試

數學
考
科
參
考
答
案
暨
詳
解

翰林出版事業股份有限公司



版權所有・翻印必究

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(5)	(2)	(2)	(3)	(4)	(1)(3)(4)	(2)(3)(4)	(1)(4)(5)	(1)(2)(5)
題號	10.	11.	12.						
答案	(3)(4)	(1)(4)(5)	(1)(2)(5)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：了解多項式的虛根成對定理及長除法

解析：由虛根成對定理及方程式恰有三個根得知， $1+i$ 與 $1-i$ 互為共軛複數根

推得 x^2-2x+2 為 x^3+ax^2+bx+4 的二次因式，用長除法計算如下：

$$\begin{array}{r}
 1 \quad + \quad 2 \\
 1-2+2 \overline{) 1 \quad + \quad a \quad + \quad b \quad + \quad 4} \\
 \underline{1 \quad - \quad 2 \quad + \quad 2} \\
 (a+2) \quad + \quad (b-2) \quad + \quad 4 \\
 \underline{2 \quad - \quad 4 \quad + \quad 4} \\
 0
 \end{array}$$

$$\text{得} \begin{cases} a+2=2 \\ b-2=-4 \end{cases} \Rightarrow a=0, b=-2$$

\therefore 方程式的實根為 -2

故選(5)。

2. (2)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：級數的運算

$$\text{解析：} \because \frac{S_{12}}{12} - \frac{S_{10}}{10} = 2 \quad \therefore \frac{\frac{12(a_1+a_{12})}{2}}{12} - \frac{\frac{10(a_1+a_{10})}{2}}{10} = 2$$

$$\text{故 } a_{12} - a_{10} = 4 \quad \therefore 2d = 4 \Rightarrow d = 2$$

$$\therefore S_{2012} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = 2012(-2012) + \frac{2012 \times (2012-1) \times 2}{2} = -2012$$

故選(2)。

3. (2)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：了解對數的定義及對數函數的圖形

解析： $A(3, 2)$ 代入 $y = \log_a x \Rightarrow 2 = \log_a 3 \Rightarrow a^2 = 3$

$$\therefore a = \sqrt{3} \approx 1.732$$

$$\text{則 } f(x) = \log_{(2-a)}(x+a-1) \approx \log_{0.268}(x+0.732)$$

以遞減函數 $y = \log_{0.268} x$ 左移 0.732 單位可得

故選(2)。

4. (3)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：簡易對數值的計算

解析： $100^{|k|} < 12^{10}$ 兩邊同取底數 10 的常用對數 $\Rightarrow \log 10^{2|k|} < \log 12^{10} \Rightarrow 2|k| < 10(2 \log 2 + \log 3)$

$$\Rightarrow |k| < 5 \times (2 \times 0.3010 + 0.4771) \Rightarrow |k| < 5.3955$$

$$\therefore k = \pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0 \text{ 共 11 個}$$

故選(3)。

5. (4)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：能確實明白重複組合的應用

解析：設甲分到 $2x+1$ 個，乙分到 $2y+1$ 個，丙分到 $2z+1$ 個，其中 x, y, z 為非負整數，

依題意可得 $2x+1+2y+1+2z+1=13 \Rightarrow x+y+z=5$

\therefore 所求為 $H_5^3 = C_5^7 = C_2^7 = 21$

故選(4)。

二、多選題

6. (1)(3)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：運用代數基本定理、勘根定理

解析：考慮 $f(x)=3x^3+9x^2+4x-1$

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	-	+	+	-	+

$\therefore f(-3) \cdot f(-2) < 0, f(-1) \cdot f(0) < 0$ 且 $f(0) \cdot f(1) < 0$

由勘根定理得知，在 $-3 \sim -2$ 之間， $-1 \sim 0$ 之間和 $0 \sim 1$ 之間必有實根

故選(1)(3)(4)。

7. (2)(3)(4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：解絕對值不等式

解析：(1) \times ：甲距離： $4 \times 6 = 24 > \frac{42.195}{2} = 21.0975$

(2) \circ ：乙距離： $6.5 \times 6 = 39 > 24$

(3) \circ ： $\therefore \frac{42.195}{6} = 7.0325$ ，則若有人跑完全程，其平均時速一定會大於 7.0325 公里 / 小時

(4) \circ (5) \times ：設丙的跑步距離為 x 公里，則 $|x-24| + |x-39| > \frac{1}{2} \times 42.195 = 21.0975$

①若 $x > 39$ ： $x-24+x-39 > 21.0975 \Rightarrow 2x > 84.0975$

$\therefore x > 42.04875$

②若 $24 < x \leq 39$ ： $x-24-(x-39) > 21.0975 \Rightarrow 15 > 21.0975$ (不合)

③若 $x \leq 24$ ： $-(x-24)-(x-39) > 21.0975 \Rightarrow -2x > -41.9025$

$\therefore x < 20.95125$

由①、②、③可得 $x > 42.04875$ 或 $x < 20.95125$

故選(2)(3)(4)。

8. (1)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：插值多項式的應用

解析：設三次實係數多項式

$$g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + 2x \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 4x \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 6x \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \text{ 且 } a \neq 0,$$

即 $g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + f(x)$

$\therefore f(x)$ 通過 (1, 2)、(2, 4)、(3, 6) 三點，可得 $f(x) = 2x$

$\therefore g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + 2x$

(1) \circ ： $f(4) = 8$

(2) \times ： $g(4) = a(4-1)(4-2)(4-3) + 2x = 6a + 8 \neq 8$ ($a \neq 0$)

(3) \times ： $\therefore f(x) = 2x$ ，且 $g(0) = -6a \neq 0$ $\therefore g(x)$ 不為 $f(x)$ 的倍式

(4) \circ ： $\therefore g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + 2x = (x-1)(x-2)[a(x-3)] + 2x$

$\Rightarrow g(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $f(x)$

(5) \circ ： $\therefore h(x) = g(x) - f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ 且 $a \neq 0$ ，故有三個實根， $x = 1, 2, 3$

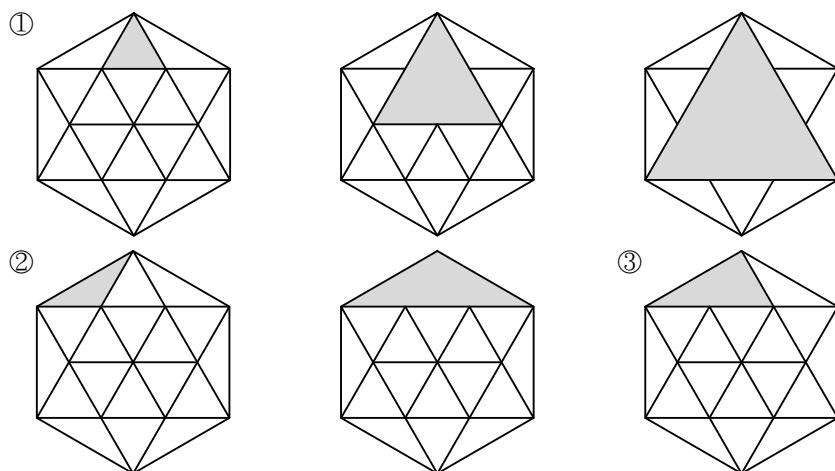
故選(1)(4)(5)。

9. (1)(2)(5)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：計數原理推理

解析：如下圖，以最小的三角形面積為 1 單位，則所形成之三角形：



①正三角形的有：1 單位有 12 個，4 單位有 6 個，9 單位有 2 個

②等腰三角形的有：1 單位有 6 個，3 單位有 6 個

③任意三角形的有：2 單位有 12 個

可得 $a=6$ ， $N=12+6+2+6+6+12=44$

故選(1)(2)(5)。

10. (3)(4)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：排列組合之基本概念

解析：(1) \times ： $(a+b)^{100}$ 的展開式不同類項共有 $H_{100}^2 = C_{100}^{101} = C_1^{101} = 101$ 項

(2) \times ： $\because A$ 集合有 n 個元素 $\therefore A$ 之部分集合共有 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

(3) \circ ：若 $C_{12}^n = C_{18}^n$ ，則 $n=12+18=30$ ，故 $P_2^n = P_2^{30} = 30 \times 29 = 870$

(4) \circ ： $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{r=0}^{10} C_r^{10} (x^2)^{10-r} \left(\frac{-1}{x}\right)^r = \sum_{r=0}^{10} (-1)^r C_r^{10} \cdot x^{20-2r} \cdot x^{-r}$

常數項即 x 之次方為 0，則 $(20-2r)+(-r)=20-3r=0$

得 $r = \frac{20}{3}$ (不合)，故常數項為 0

(5) \times ： \because 兩點可唯一決定一直線 \therefore 五個相異點，可連成 $C_2^5 = 10$ 條直線

故選(3)(4)。

11. (1)(4)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：判讀統計表、平均數、相關程度

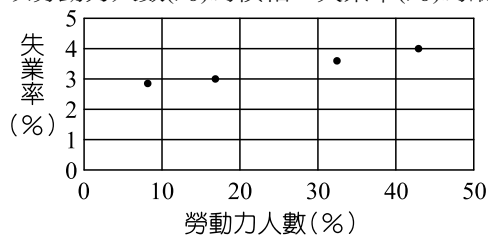
解析：(1) \circ

(2) \times (3) \times (4) \circ ：教育程度在大學(專科)及以上的失業率為 $\frac{42.9\% \times 4.0\% + 8.1\% \times 2.9\%}{42.9\% + 8.1\%} = 3.8\%$

教育程度在高中(職)及以下的失業率為 $\frac{16.6\% \times 3.0\% + 32.4\% \times 3.6\%}{16.6\% + 32.4\%} = 3.4\%$

\therefore 大學(專科)及以上的失業率比高中(職)及以下的失業率高

(5) \circ ：以勞動力人數(%)為橫軸，失業率(%)為縱軸，作散佈圖如下



故選(1)(4)(5)。

12. (1)(2)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：線性變換對統計數值平均數、標準差、相關係數的影響

解析：(1) $\circ : \mu_y = 4 \left(\frac{45-45}{5} \right) + 60 = 60$ (分)

(2) $\circ : \sigma_y = \frac{4}{5} \sigma_x = \frac{4}{5} \times 5 = 4$ (分)

(3) \times ：平均數為 60 分，並非中位數，無法確定有一半的學生達 60 分及格

(4) \times ：調整後的標準差為 4，比調整前的標準差 5 小，資料更集中，每個同學成績間的差距變小
 \therefore 更不容易看出每個同學成績間的差距

(5) \circ ：斜率 $\frac{4}{5} > 0$ 的線性變換表示 x, y 為完全正相關

$$\therefore r_{xy} = 1$$

故選(1)(2)(5)。

第貳部分：選填題

A. $-4 < a < 4$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式不等式及二次函數的恆正

解析： $\because (x+1)(x-3)(x^2+ax+4) < 0$ 的解為 $-1 < x < 3$

$\therefore x^2+ax+4 > 0$ 恆成立

$$\therefore D = a^2 - 16 < 0 \Rightarrow -4 < a < 4。$$

B. 5

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：運用獨立事件的性質求機率

解析： $P(\text{靶面至少命中 1 發的機率}) = 1 - P(\text{甲、乙、丙連續不中})$
 $= 1 - (1-0.8)(1-0.5)(1-0.3)(1-0.8)(1-0.5)$
 $= 0.993 > 0.99$

\therefore 至少要射擊 5 發。

C. 10

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：數線上的幾何、二次函數的極值

解析： $\because |2x-a| \geq b \Leftrightarrow x \geq 6$ 或 $x \leq -2$

$$\Leftrightarrow |x-2| \geq 4$$

$$\Leftrightarrow |2x-4| \geq 8$$

$$\therefore a=4, b=8$$

$$\text{代入 } f(x) = -2x^2 + ax + b = -2x^2 + 4x + 8 = -2(x-1)^2 + 10$$

\therefore 當 $x=1$ 時， $f(x)$ 有最大值 10。

D. (7, 16)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

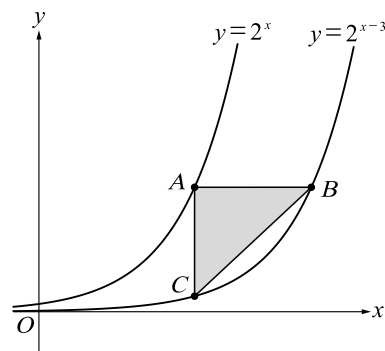
目標：指數函數的平移與指數方程式

解析：作略圖如右，可得 $\overline{AB} = 3$ ，又 $\triangle ABC$ 的面積為 21 $\Rightarrow \overline{AC} = 14$

$$\text{令 } A(k, 2^k), B(k+3, 2^k), C(k, 2^{k-3})$$

$$\text{則 } 2^k - 2^{k-3} = 14 \Rightarrow 2^k \left(1 - \frac{1}{8} \right) = 14 \Rightarrow 2^k = 16 \Rightarrow k=4$$

$\therefore B(7, 16)$ 。



E. $\frac{199}{348}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：運用貝式定理求機率

$$\text{解析：所求機率 } P = \frac{\frac{1}{150} \times \frac{99.5}{100}}{\frac{1}{150} \times \frac{99.5}{100} + \frac{149}{150} \times \frac{0.5}{100}} = \frac{199}{348}。$$

F. 4

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：數列與對數的綜合運算

解析：原式即 $\frac{\log a_n}{\log(n+1)} = 1 + \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$

$$\text{左右同乘 } \log(n+1) \Rightarrow \log a_n = \log(n+1) + \frac{1}{n+1} = \log \left[(n+1)10^{\frac{1}{n+1}} \right]$$

$$\therefore a_n = (n+1) \times 10^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \frac{a_n}{n+1} = 10^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{又 } \frac{a_n}{n+1} = 10^{\frac{1}{n+1}} < 1.6 = \frac{16}{10}, \text{ 兩邊同取 } \log \Rightarrow \frac{1}{n+1} < 4 \log 2 - 1 \approx 0.204 \Rightarrow n > \frac{1}{0.204} - 1 \approx 3.902$$

$$\therefore n \in N \quad \therefore n \geq 4$$

故所求自然數 n 最小值為 4。

G. 9.6

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數的計算

解析：設 1 顆原子彈釋放的能量為 E ，而此小行星釋放能量相當於芮氏規模 M_A

$$\text{則 } \begin{cases} \log E = 4.8 + 1.5 \times 6.2 \\ \log 114000E = 4.8 + 1.5 \times M_A \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{兩式相減} &\Rightarrow \log 1.14 \times 10^5 \times E - \log E = 1.5M_A - 1.5 \times 6.2 \\ &\Rightarrow \log 1.14 + \log 10^5 + \log E - \log E = 1.5(M_A - 6.2) \\ &\Rightarrow 0.057 + 5 = 1.5(M_A - 6.2) \\ &\Rightarrow M_A \approx 9.57 \approx 9.6 \end{aligned}$$

故相當於芮氏規模 9.6 的地震。

H. $\frac{5}{26}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率

解析：設 A 代表薪資多於 50 千元的事件， B 代表小強從事運輸及倉儲業的事件

$$\text{故所求機率為 } P(B|A) = \frac{30}{37+27+39+23+30} = \frac{30}{156} = \frac{5}{26}。$$