

108 學年度全國高級中學
學科能力測驗模擬考試

數學
考
科
參
考
答
案
暨
詳
解

翰林出版事業股份有限公司



版權所有・翻印必究

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(5)	(2)	(1)	(5)	(1)	(3)	(3)(4)	(3)(4)(5)	(1)(3)
題號	10.	11.	12.						
答案	(3)(5)	(3)(4)(5)	(2)(3)(5)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：數據的判讀與標準差的關係

解析：由數據可以看出甲乙的分數都差 10 分，因此 $S_{\text{甲}} = S_{\text{乙}}$

而丙生的分數是乙生的 0.8 倍，所以 $S_{\text{丙}} = 0.8S_{\text{乙}}$

因此 $S_{\text{甲}} = S_{\text{乙}} > S_{\text{丙}}$

故選(5)。

2. (2)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：數列的計數

解析：可以用列舉法列出

$\boxed{00:00}$ 、 $\boxed{01:10}$ 、 $\boxed{02:20}$ 、 $\boxed{03:30}$ 、 $\boxed{04:40}$ 、 $\boxed{05:50}$ 、 $\boxed{10:01}$ 、 $\boxed{11:11}$ 、 $\boxed{12:21}$ 、 $\boxed{13:31}$ 、
 $\boxed{14:41}$ 、 $\boxed{15:51}$ 、 $\boxed{20:02}$ 、 $\boxed{21:12}$ 、 $\boxed{22:22}$ 、 $\boxed{23:32}$

共 16 次

故選(2)。

3. (1)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次函數恆正的條件

解析：因為 $x^2 + 3x + 3 > 0$ 恆成立

所以 $-x^2 - 3x - 3 \leq 2x^2 + kx + k \leq 3x^2 + 9x + 9$ 恆成立

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + kx + k \geq -x^2 - 3x - 3 \\ 2x^2 + kx + k \leq 3x^2 + 9x + 9 \end{cases} \text{ 恆成立} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + (k+3)x + (k+3) \geq 0 \\ x^2 + (9-k)x + (9-k) \geq 0 \end{cases} \text{ 恆成立}$$

利用二次函數非負條件

$$\Rightarrow \begin{cases} (k+3)^2 - 12(k+3) \leq 0 \\ (9-k)^2 - 4(9-k) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 - 6k - 27 \leq 0 \\ k^2 - 14k + 45 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-9)(k+3) \leq 0 \\ (k-9)(k-5) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 \leq k \leq 9 \\ 5 \leq k \leq 9 \end{cases} \Rightarrow 5 \leq k \leq 9, \text{ 所以滿足的 } k \text{ 值有 5 個}$$

故選(1)。

4. (5)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：二項式定理

解析：由二項式定理得知

$$C_0^n - \frac{C_1^n}{3^1} + \frac{C_2^n}{3^2} - \frac{C_3^n}{3^3} + \frac{C_4^n}{3^4} - \cdots + (-1)^n \times \frac{C_n^n}{3^n} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{2000}$$

兩邊取對數得知， $n(\log 2 - \log 3) < -\log 2000$

$$\Rightarrow n(0.3010 - 0.4771) < -(3 + 0.3010)$$

$$\Rightarrow n > \frac{3.301}{0.1761} = 18.7\cdots$$

所以最小正整數為 19

故選(5)。

5. (1)

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：倍角、半角、和角公式

解析： $\sin A \cos A + (\cos A \cos B + \sin A \sin B) = \frac{6}{5}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2A + \cos(A-B) = \frac{6}{5}$$

$$\text{又 } B = 90^\circ - A \Rightarrow A - B = 2A - 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2A + \cos(2A - 90^\circ) = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2A + \sin 2A = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \sin 2A = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \sin 2A = \frac{4}{5}$$

$$\because 0^\circ < A < 45^\circ \quad \therefore 0^\circ < 2A < 90^\circ$$

$$\text{可得 } \cos 2A = \frac{3}{5}$$

$$\sin A = \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos A = \sqrt{\frac{1 + \cos 2A}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{所求 } \tan A = \frac{1}{2}$$

故選(1)。

6. (3)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量線性組合與面積

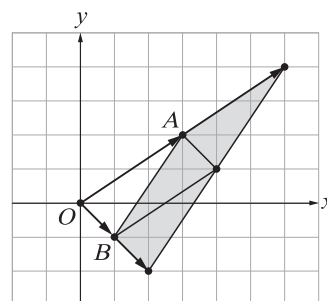
解析：P 點所成區域圖形如右

$$\triangle OAB \text{ 面積為 } \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{5}{2}$$

陰影面積為 $\triangle OAB$ 面積的 3 倍

$$\text{即 } \frac{5}{2} \times 3 = \frac{15}{2}$$

故選(3)。



二、多選題

7. (3)(4)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：排列組合搭配對數的限制條件

解析：(1) \times ：底數限制為大於 0 且不等於 1，所以 a 有 99 種選法

真數限制為大於 0，所以 b 有 100 種選法

因此讓 $\log_a b$ 有意義的數對 (a, b) 共有 9900 種

(2) \times ：當 $a=2$ 時， $b=1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$

可以分別讓 $\log_a b = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

所以共 7 種整數值

- (3) ○：要讓 $\log_a b$ 為整數，
 則 $a^x = b$ ，其中 x 為整數， a^x 是小於或等於 100 的正整數
 當 $x=0$ ， $a=2\sim 100$ ，共 99 種
 當 $x=1$ ， $a=2\sim 100$ ，共 99 種
 當 $x=2$ ， $a=2\sim 10$ ，共 9 種
 當 $x=3$ ， $a=2\sim 4$ ，共 3 種
 當 $x=4$ ， $a=2\sim 3$ ，共 2 種
 當 $x=5$ ， $a=2$ ，共 1 種
 當 $x=6$ ， $a=2$ ，共 1 種
 總共有 214 種
- (4) ○：由對數且底數大於 1 的圖形可以知道
 若 $b>0$ ，則 $\log_a b \geq 0$
- (5) ✕：若 $\log_a b > 1$ ，則 $\log_b a < 1$
 若 $0 < \log_a b < 1$ ，則 $\log_b a > 1$
 但是若 $\log_a b = 0$ ，則 $\log_b a$ 沒有意義
 因此我們可以知道使得 $\log_a b < 1$ 的個數比 $\log_a b > 1$ 的個數多
 故選(3)(4)。

8. (3)(4)(5)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：獨立事件與機率

解析：(1) ✕：因為擲出正面與得分為兩獨立事件

所以可知 $P(\text{得分} | \text{正面}) = P(\text{得分} | \text{反面})$

又因為 $P(\text{得分} | \text{正面}) = \frac{2}{3}$ ，所以 $P(\text{得分} | \text{反面}) = \frac{2}{3}$

由此可知汗損處填入兩個數字

(2) ✕：擲出正面與擲出反面為互斥事件

(3) ○： $P(3 \text{ 號籤且不得分})$

$= P(\text{正面且 3 號籤}) + P(\text{反面且 3 號籤且不得分})$

$= P(\text{正面且 3 號籤}) + P(3 \text{ 號籤沒填入汗損處且反面且抽出 3 號籤})$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{7}{27}$$

(4) ○：已知 $P(1 \text{ 號籤且得分}) = P(\text{正面且 1 號籤且得分}) + P(\text{反面且 1 號籤且得分})$

$P(3 \text{ 號籤且得分}) = P(\text{反面且 3 號籤且得分})$

又因為 $P(\text{反面且 1 號籤且得分}) = P(\text{反面且 3 號籤且得分})$

且 $P(\text{正面且 1 號籤且得分}) > 0$

所以 $P(1 \text{ 號籤且得分}) > P(3 \text{ 號籤且得分})$

(5) ○： $P(\text{擲出正面且得分}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$$P(\text{擲出反面且得分}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$P(\text{擲出正面且得分}) > P(\text{擲出反面且得分})$

故選(3)(4)(5)。

9. (1)(3)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：三角不等式或絕對值的幾何觀點

解析：利用三角不等式

$$|x+1| + |x-6| = |x+1| + |-x+6| \geq |x+1-x+6| = 7$$

$$\|x+1| - |x-6|\| \leq |(x+1) - (x-6)| = 7 \Rightarrow -7 \leq |x+1| - |x-6| \leq 7$$

故選(1)(3)。

10. (3)(5)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：排列組合

解析：(1)×：共有 $5 \times 5 \times 4 = 100$ 個不同的三位數(2)×：考慮百位數為 1：共有 $5 \times 4 = 20$ 個不同的三位數百位數為 2：共有 $5 \times 4 = 20$ 個不同的三位數百位數為 3：共有 $5 \times 4 = 20$ 個不同的三位數百位數為 4：共有 $5 \times 4 = 20$ 個不同的三位數百位數為 5：共有 $5 \times 4 = 20$ 個不同的三位數

所以第 100 個數為 543

(3)○：考慮個位數為 0：不同的三位數有 $5 \times 4 = 20$ 個個位數為 2：不同的三位數有 $4 \times 4 = 16$ 個個位數為 4：不同的三位數有 $4 \times 4 = 16$ 個

所以共有 52 個偶數

(4)×：將 0、1、2、3、4、5 分成三袋

A 袋	B 袋	C 袋
除以 3 餘數 0	除以 3 餘數 1	除以 3 餘數 2
0	1	2
3	4	5

今三位數為 3 的倍數，所以取法僅有 A、B、C 三袋各取一個來排列

若 A 袋取到 0，則共有 $2 \times 2 \times (2 \times 2) = 16$ 個不同的三位數若 A 袋取到 3，則共有 $2 \times 2 \times 3! = 24$ 個不同的三位數

所以由 0、1、2、3、4、5 所構成的 3 的倍數共有 40 個不同的三位數

(5)○：由 0、1、2、3、4、5 所組成的不同三位數且滿足百位 > 十位 > 個位者

共有 $C_3^6 = 20$ 個不同三位數

故選(3)(5)。

11. (3)(4)(5)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：數列的應用

解析：(1)×：因為 $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 = 6$ 所以 $a_1 a_2 a_3 = 10^6$ (2)×：因 a_1, a_2, a_3 成等比且 $a_1 a_2 a_3 = 10^6$ ，所以 $a_1 \cdot (a_1 r) \cdot (a_1 r^2) = a_1^3 r^3 = 10^6$ 故 $(a_1 r)^3 = (a_2)^3 = 10^6 \Rightarrow a_2 = 100$ (3)○：由(2)且 $a_2 - a_3 = 50$ ，所以 $a_3 = 50$ 故得知公比 $r = \frac{1}{2}$ (4)○：由(2)、(3)得知 $a_1 = 200$ 所以 $\log(a_1 + a_2 + a_3) = \log 350$ 而 $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 = \log 10^6$ 因為 $350 < 10^6$ ，所以此選項正確

$$\begin{aligned}
 (5) \text{ ○ : } |S_{24} - 400| &= \left| \frac{200 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{24} \right]}{1 - \frac{1}{2}} - 400 \right| \\
 &= \left| 400 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{24} \right] - 400 \right| = \left| 400 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{24} \right| < \frac{1}{1000}
 \end{aligned}$$

故選(3)(4)(5)。

12. (2)(3)(5)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量內積與正射影

解析：(1)×：因為 \vec{OA} 不平行 \vec{OB} ，所以 $\vec{OA} \neq \vec{OB}$

(2)○： \vec{OA} 在 \vec{OC} 上的正射影為 $\left(\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OC}|^2}\right)\vec{OC}$ ， \vec{OB} 在 \vec{OC} 上的正射影為 $\left(\frac{\vec{OB} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OC}|^2}\right)\vec{OC}$

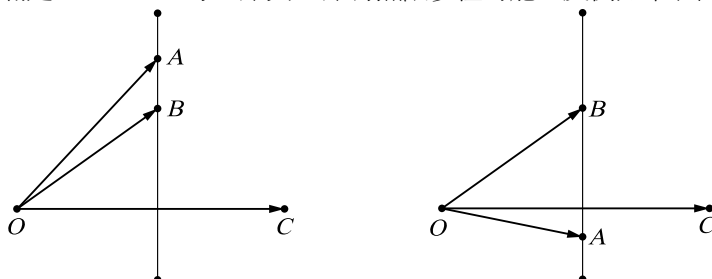
分子分母皆相同

(3)○：因為 $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} \Rightarrow (\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot \vec{OC} = \vec{0}$

又 $\vec{OA} \neq \vec{OB}$ 且 $\vec{OC} \neq \vec{0}$

所以 $(\vec{OB} - \vec{OA}) \perp \vec{OC}$ ，即 $\vec{AB} \perp \vec{OC}$

(4)×：滿足 $\vec{AB} \perp \vec{OC}$ 的 A 點與 B 點有無限多種可能，反例如下右圖



(5)○：由線性組合定義知，平面上任意向量必定可由兩個不平行的非零向量組成
故選(2)(3)(5)。

第貳部分：選填題

A. 19

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：集合的交集運算

解析：假設只參加一次的學生共有 x 人，恰好參加兩次的學生共有 y 人

$$\text{由題目我們可以列出 } \begin{cases} x + y + 8 = 40 \\ x + 2y + 24 = 75 \end{cases}$$

兩式相減可得 $y + 16 = 35$ ，因此 $y = 19$ 。

B. $\frac{7}{15}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率的運算

解析： $P(\text{有左撇子} | \text{一男一女})$

$$= 1 - P(\text{男女都非左撇子} | \text{一男一女})$$

$$= 1 - \frac{(10-2)(15-5)}{10 \times 15}$$

$$= 1 - \frac{8 \times 10}{10 \times 15} = \frac{7}{15}。$$

C. 4

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：整係數一次因式檢驗法

解析：利用整係數一次因式檢驗法知

可能的一次因式為： $x+1$ ， $x-1$ ， $7x+1$ ， $7x-1$

又其根皆為有理根，故有 3 個整係數一次因式

由常數項知

其 3 個整係數一次因式為 $x+1$ ， $x-1$ ， $7x+1$

$$\text{所以 } 7x^3 + (3a-11)x^2 - (a^2-9)x - 1 = (x+1)(x-1)(7x+1) = 7x^3 + x^2 - 7x - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a-11=1 \\ a^2-9=7 \end{cases} \Rightarrow a=4。$$

D. $(-2, 0)$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式除法原理及餘式定理

解析：由除法原理知

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 - 2x - 3)q(x) + 3x + 1 \\&= (x - 3)(x + 1)q(x) + 3x + 1 \\ \Rightarrow xf(x) &= x(x + 1)(x - 3)q(x) + 3x^2 + x \\&= (x^2 + x)(x - 3)q(x) + 3(x^2 + x) - 2x\end{aligned}$$

所以 $ax + b = -2x$

故數對 $(a, b) = (-2, 0)$ 。

E. -10

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：等差數列的應用

解析：因為 $a_{n+1} = a_n + 3$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3$$

所以 $\langle a_n \rangle$ 為一公差 3 的等差數列

$$\text{得 } a_1 + a_2 + \cdots + a_{98} = 127 = \frac{98(2a_1 + 97d)}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 97d = \frac{127}{49}$$

$$\begin{aligned}\text{則 } a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{97} &= a_1 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) + \cdots + (a_1 + 96d) \\&= 49a_1 + 48 \times 49d \\&= \frac{49}{2}(2a_1 + 96d) \\&= \frac{49}{2} \left(\frac{127}{49} - 3 \right) \\&= -10.\end{aligned}$$

F. 84

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：正弦定理與和角公式

解析：由正弦定理知 $\frac{15}{\sin B} = \frac{13}{\sin C} = 2 \cdot \frac{65}{8}$

$$\text{化簡得 } \sin B = \frac{12}{13}, \sin C = \frac{4}{5}$$

又 $\angle B$ 、 $\angle C$ 為銳角

$$\cos B = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$\cos C = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\sin A = \sin [180^\circ - (B + C)]$$

$$= \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$$

$$= \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{56}{65}$$

$$\triangle ABC \text{ 之面積為 } \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 15 \cdot \frac{56}{65} = 84.$$

G. 2

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：圓與直線相切關係

解析：因為直線與圓相切

$$\text{所以 } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{b}{a} \\ ax - y + b = 0 \end{cases} \text{ 代入消去後的式子 } x^2 + (ax + b)^2 = \frac{b}{a}$$

$$\text{即 } (1 + a^2)x^2 + 2abx + \left(b^2 - \frac{b}{a}\right) = 0 \text{ 為重根解}$$

故 $D = 0$

$$\text{所以 } 4 \left[a^2 b^2 - (1 + a^2) \left(b^2 - \frac{b}{a} \right) \right] = 0$$

$$\text{整理得 } b = a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ (算幾不等式)}$$

因此取 $a = 1$ ，得 b 的最小值為 2。

〈另解〉

若圓與直線相切，則圓心到直線距離等於半徑

$$\text{設圓 } x^2 + y^2 = \frac{b}{a} \text{ 之圓心 } O(0, 0), \text{ 半徑 } r = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\text{直線 } L: ax - y + b = 0$$

$$d(O, L) = r \Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\text{左右平方得 } \frac{b^2}{a^2 + 1} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow b = \frac{a^2 + 1}{a} = a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ (算幾不等式)}$$

因此取 $a = 1$ ，得 b 的最小值為 2。

H. -3

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：直線方程式與對稱點

解析：過 $A(2, 6)$ 作 $\angle B$ 的內角平分線 $x - y = 0$ 的對稱點得 $A'(6, 2)$ 落在 \overrightarrow{BC}

過 C 的高所在的直線 $x + 3y = 18$ 與 \overrightarrow{AB} 垂直

可假設 \overrightarrow{AB} 為 $3x - y = k$ ， $A(2, 6)$ 點代入得 $k = 0$ ， \overrightarrow{AB} 直線為 $3x - y = 0$
 $3x - y = 0$ 與 $x - y = 0$ 的交點即為 $B(0, 0)$

$$\overrightarrow{BC} \text{ 斜率為 } \frac{2 - 0}{6 - 0} = \frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{BC} \text{ 為 } y - 0 = \frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow x - 3y = 0$$

得 $b = -3$ ， $c = 0$ ，因此 $b + c = -3$ 。