

## 108-E3

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 甲、乙、丙三位同學某科目小考五次的成績如下表所示，設  $S_{\text{甲}}$ 、 $S_{\text{乙}}$ 、 $S_{\text{丙}}$  分別代表甲、乙、丙三位同學五次成績的標準差。請仔細觀察表中數據，判斷下列哪一項表示  $S_{\text{甲}}$ 、 $S_{\text{乙}}$ 、 $S_{\text{丙}}$  的大小關係？

學生 \ 小考	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
甲	100	70	80	60	50
乙	90	60	70	50	40
丙	72	48	56	40	32

- (1)  $S_{\text{甲}} > S_{\text{丙}} > S_{\text{乙}}$   
(2)  $S_{\text{丙}} > S_{\text{甲}} = S_{\text{乙}}$   
(3)  $S_{\text{甲}} > S_{\text{丙}} = S_{\text{乙}}$   
(4)  $S_{\text{乙}} > S_{\text{甲}} = S_{\text{丙}}$   
(5)  $S_{\text{甲}} = S_{\text{乙}} > S_{\text{丙}}$
2. 有一個 24 小時制的數字鐘顯示的範圍從  $00:00$  到  $23:59$ 。請問在一天之中有多少次鐘面顯示的數字出現迴文數？(一個迴文數是指這個數字由正向讀起來與由逆向讀起來數值都相同，例如： $02:20$ ， $23:32$ ，……)
- (1) 14  
(2) 16  
(3) 17  
(4) 18  
(5) 24

3. 若對任意的實數  $x$ ，不等式  $-1 \leq \frac{2x^2+kx+k}{x^2+3x+3} \leq 3$  恆成立，則  $k$  的整數解有幾個？

- (1) 5
- (2) 6
- (3) 7
- (4) 9
- (5) 10

4. 求滿足  $C_0^n - \frac{C_1^n}{3^1} + \frac{C_2^n}{3^2} - \frac{C_3^n}{3^3} + \frac{C_4^n}{3^4} - \cdots + (-1)^n \times \frac{C_n^n}{3^n} < \frac{1}{2000}$  的最小正整數  $n$  為何？

- (1) 15
- (2) 16
- (3) 17
- (4) 18
- (5) 19

5. 設一直角三角形  $\triangle ABC$ ，已知  $0^\circ < A < 45^\circ$ ， $C = 90^\circ$ ，且兩內角  $A$ 、 $B$  滿足

$$\sin A \cos A + \cos A \cos B + \sin A \sin B = \frac{6}{5}, \text{ 則 } \tan A \text{ 之值為何？}$$

- (1)  $\frac{1}{2}$
- (2)  $\frac{3}{4}$
- (3) 1
- (4)  $\frac{4}{3}$
- (5)  $\frac{6}{5}$

6. 假設  $\vec{OA} = (3, 2)$ ,  $\vec{OB} = (1, -1)$ , 若  $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$  且  $1 \leq x+y \leq 2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , 試求  $P$  點所在區域之面積為何?

- (1)  $\frac{5}{2}$
- (2) 5
- (3)  $\frac{15}{2}$
- (4) 10
- (5)  $\frac{25}{2}$

## 二、多選題（占 30 分）


說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 已知  $\log_a b$  有意義，且  $a$ 、 $b$  為小於或等於 100 的正整數，請問下列哪些正確？
- (1) 全部的數對  $(a, b)$  共有 10000 種
  - (2) 若  $\log_a b$  為整數，則  $\log_a b$  有 6 種不同的值
  - (3) 若  $\log_a b$  為整數，則數對  $(a, b)$  有 214 種
  - (4)  $\log_a b$  的值不可能是負的
  - (5)  $\log_a b > 1$  的機率和  $\log_a b < 1$  的機率相等

8. 有一遊戲為同時擲一硬幣和抽一支籤，其中硬幣擲出正面的機率為  $\frac{2}{3}$ ，籤筒裡放有編號

1~3 號的籤，每支籤抽中機率相等。得分的方法有兩種：

i. 硬幣擲出正面，且抽到編號是 1 或 2 的籤。

ii. 硬幣擲出反面，且抽到編號是  的籤。

但其中有處不慎被汙損，想請人任意填入籤的號碼，希望填入後擲出正面與得分為兩獨立事件，則下列哪些正確？

(1) 汙損處應填入一個數字

(2) 擲出正面與擲出反面為獨立事件

(3) 在請人填入數字前，推估抽出 3 號籤且不得分的機率為  $\frac{7}{27}$

(4) 抽出 1 號籤且得分的機率大於抽出 3 號籤且得分的機率

(5) 擲出正面且得分的機率大於擲出反面且得分的機率

9. 下列方程式中，請選出有實數解的選項。

(1)  $|x+1| + |x-6| = \frac{7\sqrt{6}}{2}$

(2)  $|x+1| + |x-6| = \frac{\sqrt{41}}{3}$

(3)  $|x+1| - |x-6| = -\sqrt{2}$

(4)  $|x+1| - |x-6| = -7\sqrt{3}$

(5)  $|x+1| - |x-6| = 100$

10. 由 0、1、2、3、4、5 這六個數字中，任選三個相異數作為三位數(數字不重複)，則下列選項哪些正確？

(1) 共有 120 個不同的三位數

(2) 以由小而大之順序排列時，第 100 個數為 432

(3) 共有 52 個偶數

(4) 3 的倍數共有 24 個

(5) 此三位數滿足百位 > 十位 > 個位者共有 20 個

11. 設一等比數列的前三項  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$  滿足  $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 = 6$ ，且  $a_2 - a_3 = 50$ ，則下列敘述哪些正確？
- (1)  $a_1 a_2 a_3 = 64$
  - (2)  $a_2 = 50$
  - (3) 此數列公比為  $\frac{1}{2}$
  - (4)  $\log(a_1 + a_2 + a_3) < \log a_1 + \log a_2 + \log a_3$
  - (5) 若  $S_n$  為此數列的前  $n$  項和，則  $|S_{24} - 400| < \frac{1}{1000}$
12. 設  $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$  為平面上三個互不平行的非零向量，若  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ ，則下列選項哪些正確？
- (1)  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$
  - (2)  $\overrightarrow{OA}$  與  $\overrightarrow{OB}$  在  $\overrightarrow{OC}$  方向上的正射影相同
  - (3)  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC}$
  - (4)  $\overrightarrow{OA}$  與  $\overrightarrow{OC}$  的夾角恆大於  $\overrightarrow{OB}$  與  $\overrightarrow{OC}$  的夾角
  - (5) 存在一組實數  $r$ 、 $s$ ，使得  $r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

## 第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13–29)。  
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 某一個班級有 40 名學生。第一週，班上有一群學生參加第一次遠足；第二週，班上又有一群學生參加第二次遠足；第三週，班上又有一群學生參加第三次遠足。當老師將這三次遠足的學生每一次的參加人數加起來，他得到的總人數為 75 人。已知三次遠足全都參加的學生有 8 位，又每位學生至少都參加一次遠足，則恰好參加兩次遠足的學生有 ⑬⑭ 人。

B. 某一個班級有 10 名男學生及 15 名女學生，其中有 2 名男生及 5 名女生是左撇子，從這個班級隨意選取兩名學生，在已知取到的學生是一男一女的情況下，這兩名學生中有左撇子的機率為  $\frac{\textcircled{15}}{\textcircled{16}\textcircled{17}}$ 。(化為最簡分數)

C. 若  $a$  為正整數且方程式  $7x^3 + (3a - 11)x^2 - (a^2 - 9)x - 1 = 0$  的根，皆為有理根，則  $a$  值為  $\underline{\textcircled{18}}$ 。

D. 已知多項式  $f(x)$  除以  $x^2 - 2x - 3$  的餘式為  $3x + 1$ ，且多項式  $xf(x)$  除以  $x^2 + x$  的餘式為  $ax + b$ ，則數對  $(a, b) = \underline{(\textcircled{19}\textcircled{20}, \textcircled{21})}$ 。

E. 設數列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，滿足： $a_{n+1} = a_n + 3$ ，且  $a_1 + a_2 + \dots + a_{98} = 127$ ，試求  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{97} = \underline{\textcircled{22}\textcircled{23}\textcircled{24}}$ 。

F. 設一圓內接銳角  $\triangle ABC$ ，已知  $\overline{AB} = 13$ ， $\overline{AC} = 15$ ，且圓半徑為  $\frac{65}{8}$ ，試求  $\triangle ABC$  之面積為  $\underline{\textcircled{25}\textcircled{26}}$ 。

G. 設  $a, b$  為正實數，若圓  $x^2 + y^2 = \frac{b}{a}$  與直線  $ax - y + b = 0$  相切，則滿足此條件之  $b$  的最小值為  $\underline{\textcircled{27}}$ 。

H. 已知  $\triangle ABC$  中，若點  $A(2, 6)$ 、 $\angle B$  的內角平分線方程式為  $x - y = 0$ ，過  $C$  點的高所在直線的方程式為  $x + 3y = 18$ ，若  $\overrightarrow{BC}$  直線方程式為  $x + by + c = 0$ ，則  $b + c = \underline{\textcircled{28}\textcircled{29}}$ 。

## 參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  的公式解： $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B)=\sin A \cos B+\cos A \sin B$   
 $\cos(A+B)=\cos A \cos B-\sin A \sin B$   
 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A \tan B}$

三角函數的半角公式： $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$   
 $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$   
 $\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ ，(其中  $\cos\theta\neq-1$ )  
等號右邊取正或取負由  $\frac{\theta}{2}$  所在的象限決定

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\mu_X=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$

標準差  $\sigma_X=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2-\mu_X^2}$

5. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

相關係數  $r_{XY}=\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式為  $y-\mu_Y=r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2}\approx 1.414$ ， $\sqrt{3}\approx 1.732$ ， $\sqrt{5}\approx 2.236$ ， $\sqrt{6}\approx 2.449$ ， $\pi\approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2\approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3\approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5\approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7\approx 0.8451$